考虑尺度效应的土壤溶质运移动力学特征分析

魏 峰[1,2], 王全九[1], 秦新强[2], 周蓓蓓[1]

(1. 西安理工大学 水资源研究所, 陕西 西安 710048; 2. 西安理工大学 理学院, 陕西 西安 710048)

摘 要: [目的] 为了了解土壤环境中弥散尺度效应、动力学吸附等作用对溶质运移过程的影响。[方法] 应用 Laplace 变换方法和复变函数理论推得溶质运移动力学模型的解析解。利用 De Hoog 数值反演方法, 验证解析解的正确性, 利用解析解分析溶质在土壤中的运移特征。[结果] 解析解的计算结果与反演函数 Fourier 级数项数 $2N$ 较大($N=500$)时的 De Hoog 数值计算结果吻合很好; 土壤溶质浓度随尺度效应的增强、吸附作用及生物降解作用的减弱而增大; 分子扩散、一阶动力学吸附以及吸附相溶质降解作用对溶质运移变化影响较小。[结论] 所推求解析解是正确的; 土壤溶质运移的弥散尺度效应, 溶质在液相和吸附相间的线性分配作用及溶质在液相中的降解作用是影响土壤溶质运移过程的主要因素。

关键词: 尺度效应; 非平衡吸附; 反应性溶质; Laplace 变换; 解析解

文献标识码: A **文章编号**: 1000-288X(2015)01-0042-05 **中图分类号**: S153.5

DOI:10.13961/j.cnki.stbctb.2015.01.009

An Analysis on Dynamic Characteristics of Solute Transport Through Heterogeneous Soils with Scale-dependent Dispersion

WEI Feng[1,2], WANG Quanjiu[1], QIN Xinqiang[2], ZHOU Beibei[1]

(1. *Institute of Water Resource, Xi'an University of Technology, Xi'an, Shaanxi* 710048, *China*; 2. *School of Science, Xi'an University of Technology, Xi'an, Shaanxi* 710048, *China*)

Abstract: [Objective] To understand the scale-dependent dispersion and non-equilibrium kinetic adsorption etc. on solute transport in heterogeneous soils. [Methods] An analytical solution of one-dimensional reactive scale-dependent solute transport kinetic model was obtained by Laplace-transform and the inverse transform based on the complex formulation, and was illustrated to be accurate compared with the De Hoog numerical inversion method. Moreover, the distribution regularities of the solute concentration in soil were discussed and the scale effects of soil solute transport, sorption and degradation on the solute transport were analyzed by using the analytical solution. [Results] The calculations of the analytical solution and the De Hoog numerical inversion was in good agreement when inverse function Fourier series number N was 500. The solute concentration increased with the increase of the heterogeneity of soils and the decrease of adsorption and degradation of solute, and it had little change with the molecular diffusivity, first-order kinetic rate process and the degradation of the sorbed phase. [Conclusion] The research confirmed that the scale effects of soil solute transport, the sorption distribution between the two regions and the degradation in the liquid phase play major roles in solute transport through heterogeneous soils.

Keywords: scale effects; non-equilibrium adsorption; reactive solute; Laplace-transform; analytical solution

水土环境污染是一个受到广泛关注的问题。污染物、盐分等溶质在土壤中运移、转化是一个复杂过程。因此, 探求溶质运移机理, 建立适当的模拟模型并寻求准确解, 对分析预测溶质在水土环境中的运移范围和分布特征至关重要, 对预测和防治水土环境污染、土壤盐渍化具有重要意义。对流—弥散方程是描述土壤中溶质运移规律的基本方程, 但是土壤对溶质吸附而产生的延迟作用以及土壤非均质性结构产生的弥散尺度效应常常被概化为常数去处理[1-2], 这往往是不合适的[3-5], 不能反映实际农业水土环境污染、施肥过程中溶质运移转化的动力学特征。由于土壤结构的多尺度特性, 实际中土壤呈非均质特性, 弥散

收稿日期: 2014-02-21 **修回日期**: 2014-03-03

资助项目: 国家自然科学基金项目"黄土坡地土壤养分随地表径流流失动力机制与模拟模型"(51239009); "土壤水气热传输综合动力学特征及其参数确定方法"(51179150); "黄土区土壤优先流溶质迁移的试验研究"(41001132)

第一作者: 魏峰(1973—), 男(汉族), 陕西省扶风县人, 博士研究生, 研究方向为土壤溶质运移数学模拟。E-mail: weifxd@163.com。

通信作者: 王全九(1964—), 男(汉族), 内蒙古丰镇市人, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事土壤物理与溶质运移研究。E-mail: wquanjiu@163.com。

度随溶质运移距离而变化[3,6-8]。基于此,人们将弥散度表示为土壤溶质运移距离的函数。参考文献[7—9]将弥散度表示为土壤溶质运移距离的线性函数,在考虑线性吸附或无吸附时,通过 Laplace 变换得到了溶质运移问题的解析解。高光耀等[10]通过 Laplace 变换及 De Hoog 方法[11]得到了注水井附近反应性溶质运移问题的数值反演解。Chen 等[12]用溶质运移距离的渐进函数表示弥散度,通过 Laplace 变换得到了溶质运移问题的幂级数解。Kumar 等[13]将孔隙水流速度及水动力弥散系数都表示为距离的函数,利用积分变换技术得到非均质土壤中溶质运移问题的解析解。Perez 等[14]考虑了线性平衡吸附作用,利用积分变换得到非均质土壤中的溶质运移问题的幂级数解。土壤颗粒对溶质吸附不是瞬时完成的,而是一个缓慢的过程,常表现为非平衡动力学特性。因此,预测、分析土壤溶质运移过程时,考虑土壤颗粒对溶质的动力学吸附特性非常重要[5,15-17]。

本文在充分考虑对流弥散、非平衡动力学吸附及微生物降解等条件下,建立水土环境中考虑尺度效应的溶质运移转化的动力学模型。利用 Laplace 变换及解析反演方法得到模型的解析解,并对水动力弥散、动力学吸附及生物降解等作用对溶质运移过程的影响做进一步的分析,以期为土壤环境治理以及合理施肥等提供理论依据。

1　数学模型

1.1　土壤溶质迁移的控制方程

溶质在土壤中的运移、转化包括对流、弥散、吸附和微生物降解等过程。基于水动力弥散理论的对流—弥散方程(convection dispersion equation, CDE)[1],设溶质弥散系数随运移距离变化、溶质吸附过程满足一级动力学吸附方程,液相和吸附相中的溶质均满足一阶降解方程,则可得非均质土壤中溶质运移的控制方程:

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\rho}{\theta}\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left[D(z)\frac{\partial c}{\partial z}\right]-v\frac{\partial c}{\partial z}-\mu c-\frac{\rho}{\theta}\mu_1 s \tag{1}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}=k(k_d c-s)-\mu_1 s \tag{2}$$

式中:c——液相溶质浓度(g/cm³);s——吸附相溶质浓度(g/g);θ——土壤体积含水量(cm³/cm³);ρ——土壤干容重(g/cm³);$D(z)$——水动力弥散系数(cm²/d);v——土壤水平均孔隙流速(cm/d);μ——液相溶质降解速率系数(1/d);μ_1——吸附相溶质降解速率系数(1/d);k——一阶动力学吸附速率系数(1/d);k_d——液相和吸附相间溶质分配系数(cm³/g);t——时间(d);z——溶质运移距离(cm)。

实际中,由于非均质土壤中溶质运移的弥散系数是随溶质运移的距离而变化的[3,7-8]。水动力弥散系数可表示为:

$$D(z)=azv+D_0 \tag{3}$$

式中:D_0——分子扩散系数(cm²/d);a——经验参数。

Huang 等[8]认为反映土壤非均质特性的参数 a 的变化范围为 $0\leqslant a\leqslant 1$。

1.2　定解条件

稳态条件下,考虑半无限土柱内的溶质运移情况设容质的初始浓度为 0,溶质运移的上边界条件为浓度已知边界。

初始条件:$c(z,0)=s(z,0)=0$ (4)

上边界条件:$c(0,t)=c_0 \quad (t>0)$ (5)

其中 c_0 为输入溶质浓度。

下边界条件:$\left.\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}z}\right|_{z\to\infty}=0 \quad (t>0)$ (6)

2　解析解的推导

将式(3)代入式(1)可得

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\rho}{\theta}\frac{\partial s}{\partial t}=(azv+D_0)\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}+(a-1)v\frac{\partial c}{\partial z}-\mu c-\frac{\rho}{\theta}\mu_1 s \tag{7}$$

对式(7)和式(2)分别作 Laplace 变换得

$$p\bar{c}+\frac{\rho}{\theta}p\bar{s}=(azv+D_0)\frac{\partial^2\bar{c}}{\partial z^2}+(a-1)v\frac{\partial\bar{c}}{\partial z}-\mu\bar{c}-\frac{\rho}{\theta}\mu_1\bar{s} \tag{8}$$

$$p\bar{s}=k(k_d\bar{c}-\bar{s})-\mu_1\bar{s},\text{即 }\bar{s}=\frac{kk_d\bar{c}}{k+p+\mu_1} \tag{9}$$

式中:$\bar{c}$——c 的 Laplace 变换;$\bar{s}$——s 的 Laplace 变换;p——Laplace 变换参数。

将式(9)代入式(8)得

$$(azv+D_0)\frac{\partial^2\bar{c}}{\partial z^2}+(a-1)v\frac{\partial\bar{c}}{\partial z}-\left(\frac{\rho kk_d p+\mu_1}{\theta(k+p+\mu_1)}+p+\mu\right)\bar{c}=0 \tag{10}$$

令 $azv+D_0=\eta^2$,即 $z=\frac{\eta^2-D_0}{av}$,式(10)变为

$$\frac{\partial^2\bar{c}}{\partial\eta^2}+\left(1-\frac{2}{a}\right)\frac{1}{\eta}\frac{\partial\bar{c}}{\partial\eta}-\frac{4}{a^2v^2}\left(\frac{\rho kk_d p+\mu_1}{\theta(k+p+\mu_1)}+p+\mu\right)\bar{c}=0 \tag{11}$$

式(11)为 $\gamma=\frac{1}{a}$ 阶虚宗量 Bessel 方程,通解为[18]

$$\bar{c}(\eta,p)=\eta^{\gamma}[A(p)K_\gamma(\lambda\eta)+B(p)I_\gamma(\lambda\eta)] \tag{12}$$

其中,$A(p)$、$B(p)$ 为待定函数,$I_\gamma(\lambda\eta)$,$K_\gamma(\lambda\eta)$

分别为 γ 阶第一、二类虚宗量 Bessel 函数。

$$\lambda=\frac{2}{av}\sqrt{\frac{kk_d\rho(p+\mu_1)}{\theta(k+p+\mu_1)}+p+\mu}=\frac{2}{av}\sqrt{\frac{(p-p_1)(p-p_2)}{(p-p_3)}} \tag{13}$$

$$p_{1,2}=\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}-(\frac{kk_d\rho}{\theta}+k+\mu+\mu_1)\\ \pm\sqrt{(\frac{kk_d\rho}{\theta}+k+\mu+\mu_1)^2-\frac{4kk_d\rho\mu_1}{\theta}-4\mu(k+\mu_1)}\end{array}\right\} \tag{14}$$

$$p_3=-(k+\mu_1) \tag{15}$$

已知 $p_1<p_3<p_2<0$。

根据边界条件式(6)及 $I_\gamma(\lambda\eta)$ 的性质可得 $B(p)=0$，从而

$$\bar{c}(\eta,p)=\eta^\gamma A(p)K_\gamma(\lambda\eta) \tag{16}$$

对式(5)作 Laplace 变换得

$$\bar{c}(\eta_0,p)=\frac{c_0}{p}\quad(\eta_0=\sqrt{D_0}) \tag{17}$$

结合式(16)，(17)可得 $A(p)=\dfrac{c_0}{p\eta_0K_\gamma(\lambda\eta_0)}$，从而方程(1)，(2)在定解条件(3)—(5)下的 Laplace 变换解为

$$\bar{c}(\eta,p)=\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^\gamma\frac{c_0K_\gamma(\lambda\eta)}{pK_\gamma(\lambda\eta_0)} \tag{18}$$

$$\frac{c(z,t)}{c_0}=\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^\gamma\left\{\frac{K_\gamma(\lambda_0\eta)}{K_\gamma(\lambda_0\eta_0)}+\frac{2}{\pi}\left[\int_{\sqrt{-p_2}}^{\sqrt{-p_3}}+\int_{\sqrt{-p_1}}^{+\infty}\frac{J_\gamma(l\eta)Y_\gamma(l_1\eta_0)-J_\gamma(l\eta_0)Y_\gamma(l\eta)}{(J_\gamma(l\eta_0))^2+(Y_\gamma(l\eta_0))^2}\frac{e^{-x^2t}}{x}dx\right]\right\} \tag{20}$$

$$\left[\eta=\sqrt{azv+D_m},\eta_0=\sqrt{D_0},l=\frac{2}{av}\sqrt{\frac{(x^2+p_1)(x^2+p_2)}{(x^2+p_3)}}\right]$$

式中：x——积分变量；$J_\gamma(l\eta)$——γ 阶第一类 Bessel 函数；$Y_\gamma(l\eta)$——γ 阶第二类 Bessel 函数。

3 结果与分析

利用数值反演解验证所推解析解式(20)的准确性，并运用解析解式(20)对土壤溶质运移变化规律以及相应参数对溶质运移过程的影响作分析研究。参考文献[9，14，17]，设置相应参数为：$a=1$，$D_0=1(\mathrm{cm^2/d})$，$\theta=0.4$，$\rho=1.2(\mathrm{g/cm^3})$，$v=25(\mathrm{cm/d})$，$k=1(1/\mathrm{d})$，$k_d=0.1(\mathrm{cm^3/g})$，$\mu=0.15(1/\mathrm{d})$，$\mu_1=0.15(1/\mathrm{d})$。依据数值反演的方法[10-11]和所推得的解析方法，利用 Matlab 编程绘制图 1，2。由图 1，2 可见，反演函数的 Fourier 级数的项数 $2N$ 较小($N=20$)时计算结果会出现数值弥散和震荡的现象，N 值较大($N=500$)时计算结果稳定且和解析解的计算结果吻合很好。说明所推求解析解合理，可用于溶质运移变化规律的分析。

3.1 溶质在土壤中的分布规律

依据式(20)，分别取距离 $z=10$，30，50 cm，用 Matlab 编程绘制图 1，即不同长度(10，30，50 cm)土柱的溶质运移穿透曲线。由图 1 可见，穿透曲线基本

对 Laplace 变换解式(18)可通过解析反演、数值反演得到实变函数解。对于数值反演，只有选取适当参数时，才能加快收敛速度，避免出现数值弥散和震荡的现象。本文利用复变函数理论推求解析解。

对式(18)作 Laplace 逆变换得

$$c(\eta,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma-i\infty}^{\Gamma+i\infty}\bar{c}(\eta,p)e^{pt}dp \tag{19}$$

由式(13)，(18)可知 $\bar{c}(\eta,p)$ 有 4 个分支点 p_1，p_2，p_3，∞，取复平面上负半轴到点 p_2 为分支割线，可得函数 $\bar{c}(\eta,p)$ 的单值分支。选取适当的积分路径，根据复变函数理论可得定解条件(3)，(4)，(5)下，考虑尺度效应的土壤溶质运移模型(1)，(2)的解析解：

可分两阶段。前一阶段曲线斜率较大，表明土壤中各点处的溶质浓度在前期都随时间的增加而增加；后一阶段曲线斜率逐渐减小，趋近于 0，这时溶质浓度都逐渐稳近于某一水平。而溶质在靠近输入口处达到固定水平的时间要短一点，即近距离处溶质完全穿透的时间短。同时可见，较短土柱出口处的溶质浓度增加的速度很快，随着土柱长度的增加，溶质浓度增加的速度变缓，并且溶质穿透曲线逐渐下移。这是因为溶质向远处运移过程中，土壤颗粒吸附过程对溶质运移行为起到延迟作用，同时生物降解过程降低了溶质浓度，浓度梯度变小，使溶质运移速度变缓。

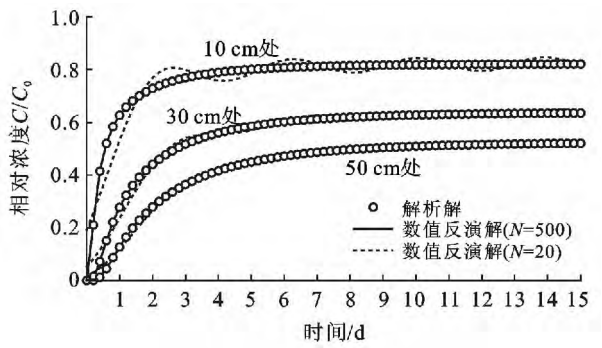


图 1 不同距离处溶质穿透曲线

依据式(20),分别设置时间 t =1,3,5 d,用 Matlab 编程绘制图 2,即不同时刻(1,3,5 d)的溶质运移的剖面分布曲线。由图 2 可见,各时刻的溶质分布曲线都随着距离的增加而递减到 0。同时随着时间的增加,溶质分布曲线递减的速度变缓,并且逐渐上移。这是因为溶质的连续输入,溶质逐渐运移到远处,使得远处溶质浓度小于近处的浓度;又因为溶质在远处逐渐积累的作用,溶质浓度随时间逐渐增大,同时使得浓度梯度逐渐变小,溶质运移速度变得越来越缓慢。

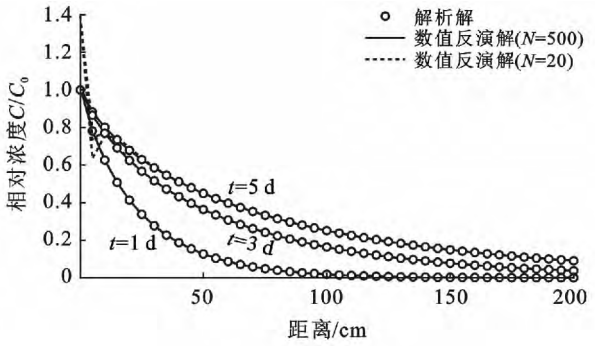


图 2　不同时间溶质分布曲线

3.2　参数对土壤溶质运移的影响分析

设孔隙水流速度为 v=25 cm/d,依据解析解式(20),用 Matlab 编程绘制时间为 t=2 d 的溶质运移剖面分布曲线图,分析尺度效应、吸附系数及降解系数对土壤溶质运移过程的影响。

图 3 为不同经验常数 a,分子扩散系数 D_0 值对应的土壤溶质浓度的剖面曲线。由图 3 可见,经验常数 a 值越大,对应靠近输入口处的溶质浓度越小,而其对应的离输入口较远处的溶质浓度高于较小经验常数 a 值的情况;同时可见,溶质的运移锋面越远。这是因为经验常数 a 值越大,土壤溶质运移的尺度效应更强,土壤分散溶质的能力更大,溶质向远距离处运移的速度更快,溶质运移的范围更大,从而相对较小经验常数 a 值的情况,近距离处溶质浓度快速下降,而较远处溶质浓度渐渐累积上升。经验常数 a 值固定,分子扩散系数 D_0 值增大时溶质浓度剖面曲线逐渐上移。这是因为分子扩散系数 D_0 值越大,分子扩散作用越强,土壤溶质扩散范围增大,浓度升高,但是变化幅度不大。由此可见,土壤溶质运移的尺度效应引起的机械弥散作用在溶质运移过程中起着主要作用。

图 4 为不同一阶动力学吸附速率系数 k、液相和吸附相间溶质分配系数 k_d 值对应的土壤溶质浓度的剖面曲线。由图 4 可见,土壤对溶质有吸附作用时比无吸附作用(k=0、k_d=0)时的溶质浓度剖面曲线低,这是由于溶质被土壤颗粒吸附而降低了液相中溶质的浓度。随着一阶动力学吸附速率系数 k、液相和吸附相间溶质分配系数 k_d 值的增大,溶质浓度曲线都下移。这是由于一阶动力学吸附速率系数 k 值、液相和吸附相间溶质分配系数 k_d 值增大时,土壤对溶质的吸附作用加强,吸附在土壤颗粒上的溶质量在增加,同时液相中溶质的量在减少,溶质浓度降低;一阶动力学吸附速率系数 k 值增大时溶质浓度曲线下移幅度比液相和吸附相间溶质分配系数 k_d 值增大时的溶质浓度曲线下移幅度小,这说明液相和吸附相间溶质分配系数 k_d 值对溶质浓度影响比一阶动力学吸附速率系数 k 值对溶质浓度影响要大,吸附过程中以溶质在液相和吸附相间的分配作用为主。

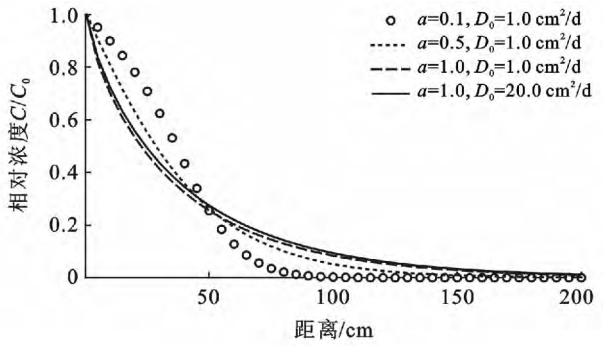


图 3　不同 a,D_m 值对应的土壤溶质浓度分布曲线

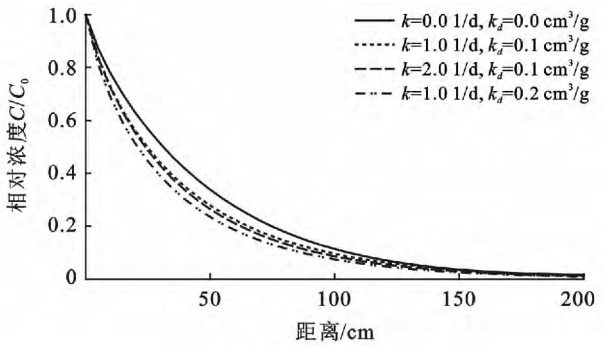


图 4　不同 k,k_d 值对应的土壤溶质浓度分布曲线

图 5 为不同液相溶质降解速率系数 μ,吸附相溶质降解速率系数 μ_1 值对应的土壤溶质浓度的剖面曲线。由图 5 可以看出,溶质浓度分布曲线都随着液相溶质降解速率系数 μ,吸附相溶质降解速率系数 μ_1 值的增大而逐渐下移。这是因为当降解系数增大时,溶质降解的速率增大,土壤溶质含量减少,溶质浓度降低;液相溶质降解速率系数 μ 对溶质运移变化影响很大,而吸附相溶质降解速率系数 μ_1 对溶质运移变化基本上没有影响。这是由于吸附相溶质含量比液相的要少得多,当液相溶质降解速率系数增大时,液相中的溶质降解量相对增加很大,从而使土壤溶质浓度降低很多。由此可见,降解过程中溶质在液相中的降解起主要作用。

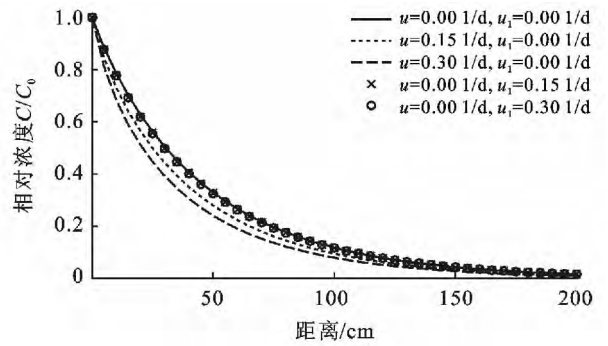


图 5 不同 μ,μ_1 值对应的土壤溶质浓度分布曲线

4 结 论

充分考虑对流弥散、非平衡动力学吸附、微生物降解等情况下,建立了考虑尺度效应的土壤溶质运移的动力学模型。并采用 Laplace 变换和复变函数等理论,在连续输入条件下推得模型的解析解。利用 De Hoog 数值反演方法对解析解进行验证,并分析了弥散、吸附和降解等作用对溶质运移过程的影响。结果表明,本研究所得解析解是正确的,可用于土壤溶质运移过程的模拟,为实际应用提供理论依据;土壤溶质运移的尺度效应在溶质运移过程中起着主要作用,经验参数 a 值越大,对应靠近输入口处的溶质浓度越小,而远离输入口处的溶质浓度越高,溶质分布范围更广,溶质的运移锋面更远;溶质浓度随一阶动力学吸附速率系数 k,液相和吸附相间溶质分配系数 k_d 值的增大而降低,而受液相和吸附相间溶质分配系数 k_d 值的影响更大,吸附过程中以溶质在液相和吸附相间的分配作用为主;溶质浓度也随着液相溶质降解速率系数 μ,吸附相溶质降解速率系数 μ_1 值的增大而降低,而受液相溶质降解速率系数 μ 值的影响更大,降解过程中溶质在液相中的降解起主要作用。

[参 考 文 献]

[1] Van Genuchten M T, Alves W J. Analytical solutions of the one-dimensional convective-dispersive solute transport equation[R]. United States Department of Agriculture, Economic Research Service, 1982.

[2] Ziskind G, Shmueli H, Gitis V. An analytical solution of the convection-dispersion-reaction equation for a finite region with a pulse boundary condition[J]. Chemical Engineering Journal, 2011,167(1):403-408.

[3] Pickens J F, Grisak G E. Modeling of scale-dependent dispersion in hydrogeologic systems[J]. Water Resources Research, 1981,17(6):1701-1711.

[4] Sposito G, Jury W A, Gupta V K. Fundamental problems in the stochastic convection-dispersion model of solute transport in aquifers and field soils[J]. Water Resources Research, 1986,22(1):77-88.

[5] Sharma P K, Srivastava R. Numerical analysis of virus transport through heterogeneous porous media[J]. Journal of Hydro-environment Research, 2011,5(2):93-99.

[6] 郑纪勇,邵明安,张兴昌,等. 坡地土壤溶质迁移参数的空间变异特性[J]. 应用生态学报,2005,16(7):1285-1289.

[7] Yates S R. An analytical solution for one-dimensional transport in heterogeneous porous media[J]. Water Resources Research, 1990,26(10):2331-2338.

[8] Huang Kangle, Van Genuchten M T, Zhang Renduo. Exact solutions for one-dimensional transport with asymptotic scale-dependent dispersion[J]. Applied Mathematical Modelling, 1996,20(4):298-308.

[9] 张德生,沈冰,沈晋,等. 稳态条件下土壤溶质运移的两区模型及其解析解[J]. 水利学报, 2003,34(10):44-50.

[10] 高光耀,冯绍元,霍再林,等. 考虑弥散尺度效应的溶质径向运移动力学模型及半解析解[J]. 水动力学研究与进展:A 辑, 2009,24(2):156-163.

[11] De Hoog F R, Knight J H, Stokes A N. An improved method for numerical inversion of Laplace transforms[J]. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 1982,3(3):357-366.

[12] Chen Juisheng, Ni Chuenfa, Liang Chingping, et al. Analytical power series solution for contaminant transport with hyperbolic asymptotic distance-dependent dispersivity[J]. Journal of Hydrology, 2008,362(1):142-149.

[13] Kumar A, Jaiswal D K, Kumar N. Analytical solutions to one-dimensional advection-diffusion equation with variable coefficients in semi-infinite media[J]. Journal of Hydrology, 2010,380(3):330-337.

[14] Pérez Guerrero J S, Skaggs T H. Analytical solution for one-dimensional advection-dispersion transport equation with distance-dependent coefficients[J]. Journal of Hydrology, 2010,390(1):57-65.

[15] Magga Z, Tzovolou D N, Theodoropoulou M A, et al. Combining experimental techniques with non-linear numerical models to assess the sorption of pesticides on soils[J]. Journal of Contaminant Hydrology, 2012,129:62-69.

[16] 栾茂田,张金利,杨庆. 非平衡—非线性吸附情况下填埋场污染物运移分析[J]. 岩土力学,2005,25(12):1855-1861.

[17] Besnard K, de Dreuzy J R, Davy P, et al. A modified Lagrangian-volumes method to simulate nonlinearly and kinetically sorbing solute transport in heterogeneous porous media[J]. Journal of Contaminant Hydrology, 2011(120/121):89-98.

[18] 王竹溪,郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京:北京大学出版社,2012.