第 19卷第 5期 水土保持通报 Vol. 19 No. 5
1999年 10月 Bulletin of Soil and Water Conservation Oct., 1999

应用技术

解算综合实验单因子值的建模原理及方法

邢志学，李立新，陈英智
(黑龙江省水土保持科学研究所牡丹江实验站，黑龙江 牡丹江 157009)

摘 要：从多因子综合对比实验中，定量地分离出单因子值是定量分析中的一个难点。提出了解决这一问题的建模原理及对模型的解算方法，并对该原理进行了论证。举例说明了应用该原理建模和解算的方法、步骤及计算结果。

关键词：综合实验 单因子 建模
文献标识码：A 文章编号：1000-288X(1999)05-0035-03 中图分类号：S157，O241.6

Principles and Measures for Calculating Monofactor Value to Establish Model in Comprehensive Experiment

XING Zhi-xue, LI Li-xin, CHEN Ying-zhi
(*Mudanjiang Experiment Station under Heilongjiang Institute of Soil and Water Conservation, Mudanjiang City* 157009, *Heilongjiang Province, PRC*)

Abstract It is a difficult point to separate quantitatively the monofactor value in the comprehensive control multifactor experiment. The establishing principles for solving the problem, and the calculating measures of the model are presented and testified. The measures, procedures and calculating results by applying the principles are illustrated with examples.

Keywords comprehensive experiment; monofactor; model establishment

1 建模与解算的基本原理

本模型与线性规划模型同属非满秩型 n 维欧氏空间的线性数学模型。它们之间相同之处都是属于由 n 维欧氏空间的凸多面体与其相对应的凹多面体几何图形所构成。其本质区别在于线性规划数学模型在解算最优值时是在位于该图形的各顶点值上去追寻，而本模型所追寻的则是该几何图形各顶点之间的中点值。

2 对解算本模型基本原理的论证

2.1 基本原理与解算方法 1

为了使论证简捷明确，我们可通过下述事例对此加以表述。例如，在对比沟试验中，A沟的耕地、林地、草地面积分别为 a_{11}，a_{12}，a_{13}；B沟的耕地、林地、草地面积分别为 a_{21}，a_{22}，a_{23}；AB两沟的径流量分别为 b_1，b_2。试求出单位面积上耕地、林地、草地的径流量各为多少？其解算模型可用以下增广矩阵表示

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & a_{13}+a_{23} & b_1+b_2 \end{pmatrix}$$

收稿日期：1999-06-20
资助项目：黑龙江省水利厅项目：黑龙江省东部低山丘陵侵蚀区生态退化恢复与重建模型研究。
作者简介：邢志学，男，汉族，1936年生，辽宁省新民县人，高级工程师。主要从事水土保持的研究工作。

根据用线性代数求解该矩阵的基本理论可以直接证明:

引理 1 该矩阵无解, 因为其系数矩阵的行列式值即 $|D| = 0$;

引理 2 该矩阵的解可由划去矩阵的第 3行后的方程表示;

引理 3 去掉第 3行后的矩阵有无穷多个解, 其解系由通解表出。

按通解的计算理论与方法去计算:

(1) 在给定的解算范围内, 本例 3个变量的解值之和为一常量值, 即 $x_1 + x_2 + x_3 = b$;

(2) 在解算范围内, x_1, x_2, x_3单独作为离散型随机变量来说,当 $n \to \infty$ 时, 其数学期望值均为区间的各自平均值, 大于与小于它的概率, 如同向桌面投掷一枚硬币一样, 正、反面出现次数各占 50%。而这 3个变量的总和又对总体变量的影响不大, 为此将总体变量作为连续型变量, 必须服从正态分布, 其概率分布亦然;

(3) 在本例综合对比中, 由这 3个因子所造成的差异值, 取其每个单独因子最大与最小之均值, 也可以作为每个因子在整个事件中的平均“出力”值去加以理解。据此可以证明,该矩阵的解存在于两端点间的中点, 其解值为两端点相互对应的解值之和的 1 /2。

2. 2 基本原理与解算方法 2

引理 4 根据线性规划理论, 线性规划是有目标函数的规划, 没有目标函数的, 就不能称其为线性规划。

用反证法可以证明: 做为线性规划, 此矩阵没有目标函数, 因此无解。从做为一个约束条件的角度看, 因为矩阵第 3行的值, 它的存在性是唯一的而不是变量, 因此从做为一个列入约束条件的角度看则是不必要的。因此, 它仅可以做为该方程的目标函数考虑。本例目标函数应为该方程的齐次方程组的解值, 即

$$\max(|\triangle x_1|, |\triangle x_2|, |\triangle x_3|); \qquad \min(\triangle x_1, \triangle x_2, \triangle x_3)$$

其解为: $x_1 = (\max x_1 + \min x_1)/2$, $x_2 = (\max x_2 + \min x_2)/2$, $x_3 = (\max x_3 + \min x_3)/2$

由此可以证明, 本模型可用线性规划模型求解。

3 计算举例

例如,在对比沟试验中, 由于两沟耕地、林地、荒坡占地比例不同, 沟口所测得的洪峰流量也不同, 试求上述 3种地类每 1 hm^2所产生的洪峰流量值 (表 1)。

表 1 对比沟试验的基本情况

项目	总面积 /hm^2	耕地 /hm^2	林地 /hm^2	荒坡 /hm^2	洪峰流量 /($m^3 \cdot s^{-1}$)
A沟	11. 8	0. 3	11. 5	0	0. 179
B沟	12. 08	8. 51	0	3. 57	0. 68

据表 1, 本例用线性规划模型建模, 其数学模型为:

$$0.3x_1 + 11.5x_2 = 0.179, \quad 8.51x_1 + 3.57x_3 = 0.68 \qquad x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ x_3 \geqslant 0$$

式中: x_1, x_2, x_3为决策变量, 分别代表 A, B两沟每 1 hm^2耕地、林地、荒坡产生的洪峰流量值。

解算该模型的方法、步骤如下:

(1) 解算前 2个方程所构成的齐次方程组的解值, 以该解值分别做为解算线性规划模型的最大、最小目标函数值。则其目标函数为:

$$\min f(x) = -0.4195x_1 + 0.1094x_2 + x_3$$

$$\max f(x) = 0.4195x_1 + 0.1094x_2 + x_3$$

(2) 用最大、最小目标函数值, 分别求解各决策变量的优化解

max: $x_1 = 0$, $x_2 = 0.01557$, $x_3 = 0.19$

min: $x_1 = 0.077185$, $x_2 = 0.01355$, $x_3 = 0$

(3) 各决策变量最大最小优化解的算术平均值即为上述 3种地类中每 1hm²所产生的洪峰流量值, 即:

$x_1 = (\max x_1 + \min x_1)/2 = 0.0386\ m^3 \cdot s^{-1} \cdot hm^{-2}$

$x_2 = (\max x_2 + \min x_2)/2 = 0.0146\ m^3 \cdot s^{-1} \cdot hm^{-2}$

$x_3 = (\max x_3 + \min x_3)/2 = 0.095\ m^3 \cdot s^{-1} \cdot hm^{-2}$

4 结 论

(1) 由上述诸引理可知, 不论线性规划数学模型也好, 本模型也好, 其基本理论都由解线性方程组的“通解”理论派生出来的, 只不过对所解的具体数值的要求不同。线性规划所解的是各变量的顶点值, 而本模型所解的则为各变量顶点间的平均值。

(2) 本模型第 3行数值的涵义为: b_1为线性方程组一个解算范围的端点, b_2则为另一个端点; $b_1 + b_2$则为其解算范围, $a_{11} + a_{21}$, $a_{12} + a_{22}$, $a_{13} + a_{23}$为各变量等步长的单位值。

(3) 通解中, 齐次方程组的解值为单位步长各变量的增量值。

(4) 不失一般性, 其解算因子不限于 3个, 也可以是多个, 但随着因子的增多, 各因子之间的差异性会变小, 这一矛盾可按层次分析原理逐层去分析解算, 或采取对样本的挑选方法加以解决。不论从什么角度, 采用何种分析解算方法, 凡能使结果靠近区间中间的一组解值者, 都可认为趋近于真值。