土壤风蚀过程的一类随机模型

王训明[1], 董治宝[1], 武生智[2], 陈广庭[1]
(1.中国科学院 寒区旱区环境与工程研究所, 甘肃 兰州 730000; 2.兰州大学力学系, 甘肃 兰州 730000)

摘 要: 以土壤风蚀的随机理论为基础,建立了土壤风蚀的一类随机过程模型。并求出了在任意时刻任一类可风蚀物质的随机概率分布、数学期望(平均风蚀量)以及平均风蚀量的方差。与前人的研究相比,该模型不需要规定时间的长度,可以将影响风蚀的不同因素分为不同的类别,以便进行单一风蚀因子影响分析或通过求出各因子之间的联合概率密度分布而进行综合分析。

关键词: 风蚀; 概率分布; 期望; 随机模型
文献标识码: A 文章编号: 1000-288X(2001)01-0019-04 中图分类号: P931.3

A Stochastic Model for Processes of Soil Wind Erosion

WANG Xun-ming[1], DONG Zhi-bao[1], WU Sheng-zhi[2], CHEN Guang-ting[1]
(1. *The Institute of Desert Research, Chinese Academy of Sciences, Lanzhou* 730000, *Gansu Province, PRC*;
2. *Department of Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou* 730000, *Gansu Province, PRC*)

Abstract Based on the stochastic theories of soil wind erosion, a stochastic model for soil wind erosion is founded, and the stochastic probability distributions, expectations and variations for some kinds erodible soil particles at any time are calculated. Compared with the former researches, the model do not need to limit the length of the time, and classified the factors which influence the wind erosion as different kinds. And through those can analysis for single factor or through calculating the joint probability density distributions of those factors and analysis the relationships of those factors synthetically.

Keywords soil wind erosion; probability distribution; expectation; stochastic model

自 1965年 Woodruff N. P和 Siddoway F. H提出第一个风蚀预报模型[1,2]以来,为精确地预报风蚀量,有关学者在这一领域已经做出了近 40 a的不懈努力。先后有美国、前苏联及澳大利亚等国的学者们根据其本国的具体情况提出了相应的风蚀预报模型[2]。迄今为止,大多数模型仅能预报某一时段和田块上的平均风蚀状况[1,3],且通过给各风蚀因子赋予一特定的平均值来实现。但事实上,风蚀因子和风蚀量都具有明显的时空变化特征,某一区域在某一时段内的风蚀量往往是由几次严重风蚀事件所致,因而采用风蚀因子的平均值和由此得出的平均风蚀状况不能精确地反映单个的风蚀事件,在指导防止土壤风蚀实践方面存在一定的不足。为了克服上述缺陷,许多学者通过数值模拟等方法[4,5]来模拟风蚀过程,如 Skidmore和 Bond等引入风蚀力矢量来反映风蚀量的时间变化特征[3], Cole在原土壤风蚀方程的基础上提出了日风蚀量预报模型[5]、田间风蚀量的风洞实验函数计算模型[6]、随机模型[7], Anderson等提出风蚀是一个随机过程[8-9], Nassar等提出了风蚀的马尔可夫过程模型[10]。

风蚀是大气圈与土壤圈或岩石圈相互作用并受生物圈和人类活动的干扰而形成的复杂的自然—经济复合过程。无论是风蚀因子还是由此产生的风蚀过程都具有时间和空间上的随机性[10],如各等级风速的出现具有韦布尔分布特征[2]等。从理论上说,土壤颗粒被风蚀是一个随机事件,因此,通过随机理论可以模拟任一风蚀过程。从风蚀的随机理论出发,建立各风蚀因子的随机时空分布函数预报模型,可反映出多种时空尺度上的风蚀状况。但由于风蚀过程的复杂性,对其进行完全的模拟几乎是不可能的,因此,本文仅从风蚀过程中最为简单的前提出发,通过一定的假设和条件的简化,在起主导作用的风蚀因子作用下,求出任意时刻风蚀量流失的概率分布、平均风蚀量和方差等,建立土壤风蚀的一类随机方程模型。

收稿日期: 2000-09-27
资助项目: 中国科学院“百人计划”风沙物理学项目资助
作者简介: 王训明(1970-),男(汉族),助理研究员,在职博士研究生。主要从事风沙物理、风沙地貌方面的研究工作,发表论文 16篇。电话(0931)8695050, E-mail: xunming@ public.lz.gs.cn

1 模型的建立与求解

考虑某一风蚀面上地表物质组成、植被覆盖度、土体含水率、人为对地表的破坏、坡度等不同风蚀因子所形成的复杂风蚀面。且做如下假定:

(1) 风蚀过程产生前,该风蚀面上有 m 质量单元数量可蚀土壤颗粒[8, 9],且其因起主导作用的风蚀因子不同而可分为 k 类,即 $S_1, S_2, \cdots S_k$;

(2) 当风力在一定的强度时,风蚀事件发生,可蚀土壤颗粒的状态发生转移[8, 11, 12],但由于各种因素的制约,在时间间隔 f内,当 f→ 0时,至少 2质量单元数量土壤颗粒以上被风蚀转移出该风蚀面的概率 h(f)为 f的高阶无穷小量,即

$$h(f)/f \to 0 \quad (f \to 0)$$ [8, 11];

(3) 一次风蚀过程中,在 t 时刻时 S_i ($i= 1, 2,\cdots k$)类土壤颗粒的风蚀率为 $a_i(t)$,从该风蚀界面外 S_i 类土壤颗粒的迁入率为 $\lambda_i(t)$;

(4) $x_i(t)$表示 t时刻风蚀面上的 S_i 类颗粒的数量,$i= 1, 2\cdots k$;

(5) $P_x(t)$表示 t时刻风蚀面内有 x 质量单元数量土壤颗粒的概率,其中 $x= (x_1, x_2\cdots, x_k)^T$。

根据以上假定,在时间 $(t, t+\Delta t)$ 内,该风蚀面上的可蚀土壤颗粒的转移概率如下:

$$\begin{cases} x_i \to x_i - 1, a_i(t)x_i\Delta t + o(\Delta t) \\ x_i \to x_i + 1, \lambda_i(t)\Delta t + o(\Delta t) \end{cases} \tag{1}$$

由此, $P_x(t)$ 满足如下微分方程:

$$\frac{d}{dt}P_x(t) = \sum_{i=1}^{k} a_i(t)(x_i+1)P_{x+e_i}(t) + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i(t)P_{x-e_i}(t) - \sum_{i=1}^{k}\left[a_i(t)x_i + \lambda_i(t)\right]P_x(t) \tag{2}$$

式中: $e_i = (0,\cdots, \overset{i}{1}, 0,\cdots, 0)_k^T$; x_i为非负整数; $i= 1, 2,\cdots, k$

令 $G_x(t, z) = \sum_x z_1^{x_1}\cdots z_k^{x_k}P_x(t)$ 表示 x的概率生成函数, (2) 式两边同乘以 $z_1^{x_1}\cdots z_k^{x_k}$ 并关于 x 求和,则 $G_x(t, z)$ 所满足的微分方程如下:

$$\frac{\partial}{\partial t}G_x = \sum_{j=1}^{k} a_i(t)\left[1 - z_i\right]\frac{\partial}{\partial z_i}G_x + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i(t)(z_i - 1)G_x \tag{3}$$

式中: $z = (z_1\cdots z_k)^T$。

(3)式的方程为:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dz_1}{a_1(t)(z_1 - 1)} = \cdots = \frac{dz_k}{a_k(t)(z_k - 1)} = \frac{dG_x}{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(t)\left[z_i - 1\right]G_x} \tag{4}$$

共有 $k+1$个方程,前 k个方程为:

$$\frac{dz_i}{dt} = a_i(t)\left[z_i - 1\right], \quad i = 1, 2,\cdots, k$$

由此解出:

$$z_i = C_i\varphi_i^{-1}(t) + 1, \quad i = 1, 2,\cdots k \tag{5}$$

其中 $\varphi_i(t) = \exp\left\{-\int_0^t a_i(s)ds\right\}, \quad i = 1, 2,\cdots k \tag{6}$

最后一个方程为:

$$\frac{d}{dt}G_x - \sum_{i=1}^{k}\lambda_i(t)\left[z_i - 1\right]G_x = 0$$

其解为:

$$G_x = \exp\left\{\int_0^t\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(s)\varphi_i^{-1}(s)C_i\,ds\right\}C \tag{7}$$

设 $\psi_i(t) = \int_0^t\lambda_i(s)\varphi_i^{-1}(s)ds, \quad i = 1, 2,\cdots k$

式中: C 是 $C_1, C_2,\cdots C_k$ 的任意可微函数 $H\{C_1, C_2, \cdots C_k\}$

将 (5) 解出 C_i 及 (7) 代入 G_x, 则

$$G_x(t, z) = H\{\varphi_1(t)(z_1 - 1),\cdots, \varphi_k(t)(z_k - 1)\}\cdot\exp\left\{\sum_{i=1}^{k}\varphi_i(t)(z_i - 1)\psi_i(t)\right\}$$

由 $G_x(0, z_1,\cdots, z_k) = z_1^{m_1}\cdots z_k^{m_k}$ 知:

$$H\{\varphi_1(0)(z_1 - 1),\cdots, \varphi_k(0)(z_k - 1)\} = H\{z_1 - 1,\cdots, z_k - 1\} = z_1^{m_1}\cdots, z_k^{m_k}$$

因此,

$$G_x(t, z_1,\cdots, z_k) = \prod_{i=1}^{k}\left[1 + \varphi_i(t)(z_i - 1)\right]^{m_i}\cdot\exp\left\{\sum_{i=1}^{k}\varphi_i(t)\psi_i(t)(z_i - 1)\right\} \tag{8}$$

由 t时刻风蚀面上 x_i 类颗粒数量 $x_i(t)$ 的概率生成函数可得 $x_i(t)$ 的期望值和方差分别为:

$$E\left[x_i(t)\right] = \frac{\partial}{\partial z_i}G_x(t, z_1,\cdots z_k)\Big|_{z_1=\cdots z_k=1} = \varphi_i(t)\left[m_i + \psi_i(t)\right] \tag{9}$$

$$V_{ar}\left[x_i(t)\right] = \frac{\partial^2}{\partial z_i^2}G_x(t, z_1,\cdots, z_k)\Big|_{z_1=\cdots z_k=1} + E\left[x_i(t)\right] - E^2\left[x_i(t)\right] = \varphi_i(t)\{\psi_i(t) + m_i\left[1 - \varphi_i(t)\right]\} \tag{10}$$

设该风蚀面上 t时刻时未被风蚀的颗粒总量为 $x(t)$,且 $x(t) = \sum_{i=1}^{k}x_i(t)$,且 $\{x_1(t),\cdots, x_k(t)\}$为独立随机变量,故

$$E\left[x(t)\right] = \sum_{i=1}^{k}E\left[x_i(t)\right] =$$

$$\sum_{i=1}^{k} p_i(t)\left[m_i + h_i(t)\right] \tag{11}$$

$$Var[x(t)] = \sum_{i=1}^{k} Var\left[x_i(t)\right] =$$

$$\sum_{i=1}^{k} p_i(t)\{h_i(t) + m_i\left[1 - p_i(t)\right]\} \tag{12}$$

就 $x_i(t)$ 的期望和方差的极限情形而言,假定:

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t a_i(s)\,ds = +\infty$$

且

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\lambda_i(t)}{a_i(t)} = C_i(\mathrm{const}),\ i = 1, 2,\cdots k$$

则有:

$$\lim_{t\to+\infty} E\left[x_i(t)\right] = \lim_{t\to+\infty} m_i p_i(t) + \lim_{t\to+\infty} p_i(t) h_i(t)$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{\lambda_i(t)}{a_i(t)} = C_i \tag{13}$$

$$\lim_{t\to+\infty} Var\left[x_i(t)\right] = \lim_{t\to+\infty} p_i(t) h_i(t) + m_i \lim_{t\to+\infty} p_i(t)$$

$$\left[1 - p_i(t)\right] = \lim_{t\to+\infty}\frac{\lambda_i(t)}{a_i(t)} = C_i \tag{14}$$

由此可以看出, $x(t)$ 在 $t\to+\infty$ 近似于 Poisson 分布,且 t时刻时风蚀面上有 x 质量单元数量的未被风蚀的土壤颗粒的概率分布 $P_x(t)$ 可由下式表出:

$$P_x(t) = \frac{\partial^{x_1+x_2\cdots x_k}}{\partial z_1^{x_1}\cdots\partial z_k^{x_k}} G_k\Big|_{z_1=\cdots z_k=0} / x_1!\cdots x_k! \tag{15}$$

2 讨　论

(1) 若风蚀率 $a_i(t)$ 和外界向该风蚀面内的物质迁入率 $\lambda_i(t)$ 均不依赖于时间 t,则:

$$p_i(t) = \exp\left\{-\int_0^t a_i\,ds\right\} = e^{-a_i t} \tag{16}$$

$$h_i(t) = \int_0^t \lambda_i p_i^{-1}(s)\,ds = \lambda_i\int_0^t e^{a_i s} ds =$$

$$\frac{\lambda_i}{a_i}\left[e^{a_i t} - 1\right] \tag{17}$$

t时刻时风蚀面上未被风蚀的 S 类土壤颗粒的期望为:

$$E\left[x_i(t)\right] = e^{-a_i t}\left[m_i + \frac{\lambda_i}{a_i}(e^{a_i t} - 1)\right] =$$

$$\frac{\lambda_i}{a_i} + \left(m_i - \frac{\lambda_i}{a_i}\right)e^{-a_i t} \tag{18}$$

方差由下式表出:

$$Var\left[x_i(t)\right] = e^{-a_i t}\left[\frac{\lambda_i}{a_i}(e^{a_i t} - 1) +\right.$$

$$\left. m_i(1 - e^{-a_i t})\right] = \frac{\lambda_i}{a_i}(1 - e^{-a_i t}) +$$

$$m_i(e^{-a_i t} - e^{-2a_i t}) \tag{19}$$

就极限情形而言:

$$E\left[x_i(\infty)\right] = \frac{\lambda_i}{a_i} \tag{20}$$

$$Var\left[x_i(\infty)\right] = \frac{\lambda_i}{a_i} \tag{21}$$

由此可以看出: 当 $a_i(t)$,$\lambda_i(t)$ 不依赖于时间 t时,亦即外界可风蚀物质的迁入与风蚀率及时间 t不相关时,则 s_i 类可风蚀土壤颗粒中未被风蚀的数量取决于该类可蚀颗粒的初始数量、风蚀率和迁入率;这一结论已被大量的实验数据所论证。

当 $t\to+\infty$ 时,x_i的极限期望为风蚀率与迁入率的比值。

(2) 当 $\lambda_i(t)\equiv 0$,即外界没有可蚀物质迁入时,s_i类的未被风蚀的平均数量:

$$E\left[x_i(t)\right] = m_i\, p_i(t) =$$

$$m_i\exp\left\{-\int_0^t a_i(s)\,ds\right\},\ i = 1, 2,\cdots k \tag{22}$$

上式为依赖于时间 t的指数函数,并随时间的推移系统内未被风蚀掉的土壤颗粒数量呈指数衰减。

(3) 一般情形: 假设当 $E\left[x_i(t)\right]\leqslant C$, ($C =$ const)

即: 风蚀量的数学期望在一定值内时,

$$e^{-a_i t}\leqslant\frac{C - \dfrac{\lambda_i}{a_i}}{m_i - \dfrac{\lambda_i}{a_i}} = \frac{Ca_i - \lambda_i}{m_i a_i - \lambda_i},$$

亦即:

$t\geqslant\dfrac{1}{a_i}\left[\ln\left(\dfrac{Ca_i - \lambda_i}{m_i a_i - \lambda_i}\right)\right]$时,第 i类因子作用下被风蚀的颗粒数的期望为 $E\left[x_i(t)\right]$。

3 模型验证

为说明本模型的可靠性,现采用 Fan和 Disrud (1977)[13]在风洞实验中所取得的数据对模型予以验证. Fan和 Disrud (1977)采用 2.5 cm深, 40 cm宽, 100 cm长的沙盘在一定风速下对松散沙物质的风蚀状况进行实验。在每一确定风速段后,风蚀总量被测定。因此,对本模型而言, Fan和 Disrud (1977)数据可被看作是当外界迁入率 $\lambda(t)$ 为 0,且只有唯一主导风蚀因子—— 沙物质粒度组成时的情况。

由表(1)可以看出: 应用本模型所得出的预报结果具有较高的可靠性,与以往的对风蚀量的计算和预报相比,应用本模型所得出的结果与实际更为接近,具有更大的实际意义。

表 1 **Fan**和 **Disrud** (**1977**) 的部分数据及应用本模型的模拟结果

风 速 /(cm° s⁻¹)	吹蚀时间 /s	实测风蚀量 /g	未被风蚀总量 /g	风蚀率 /(g° s⁻¹)	未被风蚀总量模拟结果 /g①
1 500	60	3 290. 0	16 280. 0	0. 002 8	16 543. 6± 2 258. 4
1 600	60	3 728. 7	15 841. 3	0. 003 2	16 151. 3± 2 821. 5
1 700	60	4 496. 0	15 074. 0	0. 003 8	15 580. 2± 3 176. 4
1 800	30	2 833. 0	16 737. 0	0. 004 8	16 945. 4± 2 272. 6
1 900	30	3 358. 7	16 211. 3	0. 005 7	16 494. 0± 2 592. 5

注:① 为方程 (18), (19) ,外界迁入率 $\lambda(t)$ 为 0

4 结 论

本文以土壤风蚀的随机理论为基础 ,将复杂的风蚀过程和风蚀因子在一定的前提下进行简化。计算了一定风蚀面上可蚀土壤颗粒的随机概率分布、期望和方差等。 本模型与 Nassar (1984)所提出的随机模型相比 , Nassar主要考虑风蚀过程中悬移、跃移和蠕移 3种风蚀状态之间的转移 ,对被风蚀颗粒是否被转移出界外并未深入探讨 ,而且也并未考虑外界可蚀性颗粒向系统内转移的过程。 一般而言 ,在一次风蚀过程中 ,在一定的风蚀面上不仅有土壤颗粒被风蚀的现象 ,而且其逆过程即外界向该风蚀面内迁入可蚀颗粒的现象也同时发生 ,土壤风蚀是一种双向的输入、输出过程。 此外 ,由于土壤风蚀过程在极大程度上受外界环境的制约 ,在一次随机性的风蚀过程中 ,起作用的风蚀因子如降水、植被、坡度和颗粒粒度组成等随时间、环境等因素的变化而变化 ,起主导作用的风蚀因子必不相同。 因此 ,在本模型中将起主导作用的风蚀因子分为不同类别较为合理。

在对土壤风蚀过程的建模和数值模拟中 ,仍有许多工作必须进行下去。 就本文而言 ,仅是对土壤风蚀建立模型过程中的一次尝试。

[参 考 文 献]

[1] Woodruff N P, Siddoway F H. A wind erosion equation [J]. Soil Science Society America Proceedings. 1965, 29 (5): 602- 608.

[2] 董治宝 ,高尚玉 ,董光荣 .土壤风蚀预报研究述评 [J]. 中国沙漠 , 1999, 19(4): 312- 317.

[3] Siddmore E L, Woodruff N P. Wind erosion forces in the United States and their use in predicting soil loss[Z]. USDA- ARS, Agricultural Handbook, No. 346. 1968, 42.

[4] Bondy E, Lyles L, Hayes W A. Computing soil erosion by periods using wind energy distribution[J]. Journal of Soil and Water Conservation, 1980, 35(4): 173- 176.

[5] Cole G W, Lyles L, Hagen L J. A simulation model for daily wind erosion soil loss [J]. Transactions of ASAE. 1983, 26(6): 1757- 1765.

[6] Cole G W. A method for determining field wind erosion rates from wind tunnel derived functions [J]. Transactions of ASAE 1984, 27 (1): 110- 116.

[7] Cole G W. A stochastic formulation of soil erosion caused by wind[J]. Transactions of ASAE. 1984, 27(4): 1405- 1410.

[8] Nassar R, Fan L T, Too J R, Disurd L A. A Markov process model of wind erosion [J]. Transactions of ASAE. 1984, 27 (3): 1047- 1054.

[9] Anderson R S. Aeolian sediment transport as a stochastic process: the effect of a fluctuating wind on particle trajectories[J]. J. Geography, 1987, 95 497- 512.

[10] Anderson R S. A review of recent progress in our understanding of aeolian sediment transport [J]. Acta Mechanica, 1991, 1: 1- 19.

[11] 韩其为 ,何明民 . 泥沙运动统计理论 [M].北京: 科学出版社 , 1984. 145- 150.

[12] Sheldon M Ross. Stochastic processes [M]. John Wiley & Sons Ltd. 1983. 141- 182.

[13] Fan L T, Disrud L A. Transient wind erosion: A study of nonstationary effect on rate of wind erosion[J]. Soil Science, 1977. 124 61- 65.