

土坡滑坡侵蚀稳定性评价的解析方法

李同录¹, 郑书彦^{1,2}, 李萍¹, 徐伯荣³

(1 长安大学 地测学院, 陕西 西安 710054; 2 西安理工大学 水电学院, 陕西 西安 710048;

3 杨凌职业技术学院, 陕西 杨凌, 712100)

摘要: 滑坡是土坡重力侵蚀最普遍的一种形式, 其稳定性分析中的圆弧条分法在工程实际中被广为应用。但该方法的具体计算过程烦琐, 而且需要反复试算, 存在着不确定性。将土坡的地面线用分段直线方程表示, 将滑动面用一圆弧方程表示, 可以将原公式中的求和部分化为积分式, 从而推导出了求解稳定系数的解析式。通过几何关系将稳定系数转化为一个距离参数 t 的一元函数求得参数 t , 并获得稳定系数极小值及其对应的滑动面。若变动后缘点和剪出点, 可最终求得最危险滑动面的位置及相应的稳定系数。

关键词: 土坡; 滑坡侵蚀; 圆弧条分法; 稳定性

文献标识码: A

文章编号: 1000—288X (2004) 05—0060—04

中图分类号: P642.22

An Analytical Method for Earth Slope Stability Assessment of Landslide

LI Tong-lu¹, ZHENG Shu-yan^{1,2}, LI Ping¹, XU Bai-rong³

(1 Chang'an University, Xi'an 710054, Shaanxi Province, China; 2 Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, Shaanxi Province, China; 3 Yangling Vocational and Technical College, Yangling 7121004, Shaanxi Province, China)

Abstract: The circle sliced method of analysis of earth slope stability analysis under gravity erosion is widely employed in engineering practice. However, it involves a complex calculation process, and the identification of a potential slip surface is associated with uncertainty. First, on the two dimensional section of slope, the ground surface is regressed as linear equations, while the slip surface is defined by a circle equation; then the accumulation can be substituted by integration with the equation of the Fellenius method. From this the analytical formula was derived. An alternate method for identifying the most likely slip surface is to convert the factor of safety to a function of a parameter of length t , aided by a geometric relation. If it is supposed that the first derivative of the function equals zero, it is possible to solve the equation to get the value of t . Accordingly, the minimum factor of safety and the corresponding radius of the slip circle can be defined. As differential positions for the top point and the thrust point of the slip surface were supposed, the minimum factor of safety and the corresponding slip circle can be defined.

Keywords: earth slope; landslide erosion; circle sliced method; stability

土坡滑坡侵蚀稳定性分析中的圆弧条分法为工程界广泛应用。但在实际计算中, 该法潜在滑动面不易确定。针对此问题已有许多学者做过研究, 提出了多种改进方法^[1]; 同时条分法计算过程较为复杂, 特别是在搜索滑动面时, 每给定一个滑动面, 都要重新确定分条的边界和高度、宽度等参数。为此本文将条分法中的求和用积分来代替, 推导求解稳定系数的解析公式, 提高计算精度, 避免了人工分条的不便。

1 圆弧法的解析解

对于匀质黏性土坡, 圆弧条分法计算稳定系数 k 的公式如下^[2]:

$$k = \frac{M_R}{M_T} = \frac{\sum_{i=1}^n \tan \varphi_i w_i \cos \alpha_i + cL}{\sum_{i=1}^n w_i \sin \alpha_i} \quad (1)$$

式中: c ——土体的黏聚力; φ ——土体的内摩擦角;
 L ——滑动面圆弧总长; w_i ——第 i 条的重量;
 α_i ——第 i 条底滑面的倾角。

假设剖面上坡面线非一条直线, 可用直线分段表示, 设地面线分为 n 段, 如图 1(a) 所示。以坡脚为坐标原点, 水平为 x 轴, 竖直为 y 轴建立直角坐标系。

自坡面线转折点处作垂线, 交于潜在的滑动面圆弧, 则滑体可分为 n 段。第 i 段的地面线方程为:

收稿日期: 2004-03-03

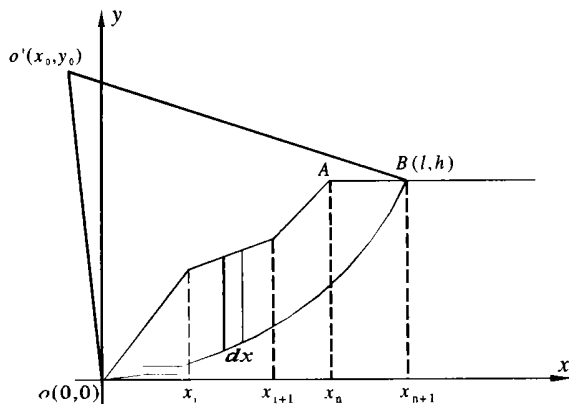
资助项目: 国家自然科学基金(40371075); 陕西省自然科学基金项目(2000D08)

作者简介: 李同录(1965—), 男(汉族), 博士, 副教授, 硕士生导师。主要从事水土保持和边坡稳定的教学与科研工作。电话(029) 85240271, E-mail: Sunsu55@vip.sina.com。

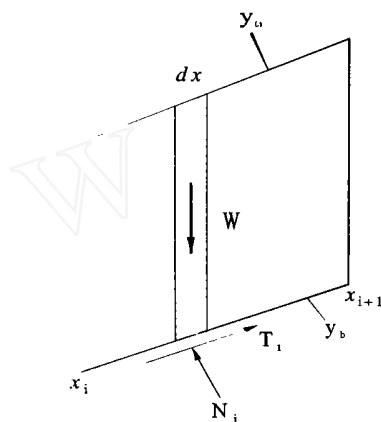
$$y_{ii} = a_i x + b_i \quad (2)$$

式中: a_i, b_i ——直线斜率和截距。假定潜在滑动面的圆心为 (x_0, y_0) , 半径为 r , 则潜在滑动面方程为:

$$y_b = y_0 - \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} \quad (3)$$



(a)



(b)

图1 土坡稳定性分析的几何要素和受力

在该块中取宽度为 dx 的土条, 如图1(b)所示, 该土条的重量为:

$$dw_{ix} = \gamma(y_{ii} - y_b) dx \quad (4)$$

由几何关系可知 $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ 也是关于 x 的函数:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}}{r} \quad (5)$$

$$\sin \alpha = \frac{x - x_0}{r} \quad (6)$$

对第 i 段而言, 每一分条宽度为微小量 dx 时, (1) 式中分子和分母中的求和部分转化为关于 x 的定积分, 积分上下界为 x_{i-1}, x_i , 则(1)式可表示为:

$$k = \frac{\tan \varphi \sum_{i=1}^n \gamma(y_{ii} - y_b) \cos \alpha dx + cL}{\sum_{i=1}^n \gamma(y_{ii} - y_b) \sin \alpha dx} \quad (7)$$

将式(2), (3), (5), (6)代入式(7)可得:

$$k = \frac{\left[\tan \varphi \sum_{i=1}^n \gamma \left(a_i x + b_i - y_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} \right) \frac{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}}{r} dx + cL/\gamma \right] / \left[\sum_{i=1}^n \gamma \left(a_i x + b_i - y_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} \right) \frac{x - x_0}{r} dx \right]}{\tan \varphi \sum_{i=1}^n R_i + cL/\gamma} \quad (8)$$

式中: γ ——边坡土体的天然重度。

$$R_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[(a_i x + b_i - y_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}) \frac{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}}{r} dx = \frac{1}{r} \left\{ -\frac{a_i}{3} [r^2 - (x - x_0)^2]^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} (a_i x_0 + b_i - y_0) [(x - x_0) \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} + r^2 \arcsin \frac{x - x_0}{r}] + [r^2 x - \frac{1}{3} (x - x_0)^3] \right\} \right|_{x_{i-1}}^{x_i} \quad (9)$$

$$T_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma \left[a_i x + b_i - y_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} \right] \frac{x - x_0}{r} dx = \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{3} a_i x^3 - \frac{1}{2} (a_i x_0 + b_i + y_0) x^2 - (b_i - y_0) x_0 x - \frac{1}{3} r [r^2 - (x - x_0)^2]^{\frac{3}{2}} \right\} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \quad (10)$$

(9), (10) 式中积分上下限是坡面分段直线函数的 x 区间, 据边坡剖面形态是可确定 $x_{i-1}, x_i, a_i, b_i, c, \varphi, r$ 都是土性参数, 在滑动面圆弧大小和位置确定的情况下, x_0, y_0, r 已知; 因此 R_i 和 T_i 都是普通代数式, 所有参数都可确定, 故当滑动面方程给定后, 即 x_0, y_0, r 为已知时, 相应的稳定系数 k 值即按(8)式求得。

2 潜在滑动面确定

土坡的最危险滑动面是未知的, 边坡稳定性评价需在一系列可能的滑动面中找到稳定系数最小的滑动面, 许多学者早已致力于此研究, 提出了一些搜索方法。其中张天宝 1978 年推导出简单土坡稳定系数与滑动面圆弧的圆心坐标和半径的多元函数^[3], 通过多元函数求极值, 求得安全系数最小值及对应的滑动面圆弧的圆心和半径, 从而确定最危险滑弧位置。但该方法要解三元微分方程组, 通过数值法才能求解, 不易推广应用。黄文东 1999 年提出在连接滑弧两个端点的弦的中垂线上搜索最危险滑弧的圆心^[4], 该方法减少了搜索的工作量, 但是仍有一定的盲目性。

作者曾提出一种简洁的算法解决这一问题。如图 2 所示, 首先假定滑动面与地面线的交点 O, B, O 为剪

出口, B 在坡顶。过 B 点作铅垂线 BC , 实际情况下, 滑动面圆弧不可能凹进铅垂线 BC 右侧, 故此过 O 点和 B 点并与 BC 线相切的弧 OB 为滑动面圆弧的下限位置; 当切线 BC 向左移动靠近 O 点时, 与其相切的圆弧贴近 OB 线, 圆心在无限远处, 即弦线 OB 为滑动面圆弧的上限位置。过 B 点作斜线 BD , OD 的距离为 t , 过 O 点 B 点和以 BD 为切线可以惟一确定一个圆弧 BDO 。当 t 在区间 $(0, l)$ 上取值时, 圆弧 BDO 在 OB 线和 BCO 弧之间变化。由此圆弧 BDO 可以表示成 O, B 点的坐标和 t 的函数, 若认为 O, B 点固定, 则该圆弧滑动面的稳定系数为 t 的一元函数 $k(t)$ 。根据导数的性质, 令 $k(t)$ 的导数 $k'(t) = 0$, 可得 $k(t)$ 的极小点位置 $t = t_0$, 由 t_0 所确定的圆弧即为与 O 点 B 点对应的最危险的滑动面, $k(t_0)$ 为其稳定系数。

假定剪出点在坡脚 O 点, 当坡形确定时, 固定 B 点, 坡高为 h , B 点的横坐标为 l , 故 B 点坐标 (l, h) 可视为已知。由几何推导可得到滑弧圆心坐标:

$$\begin{cases} x_0 = l - A(t) \\ y_0 = \frac{h}{2} - \frac{l^2}{2h} + \frac{l}{h} \times A(t) \end{cases} \quad (11)$$

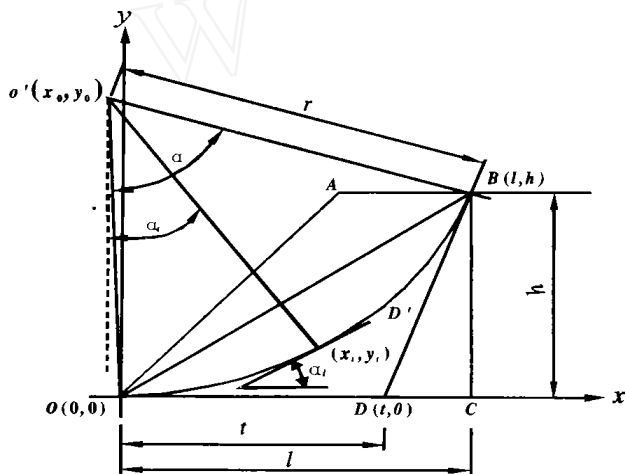


图 2 潜在滑动面确定的几何图解

$$(13) \text{ 式中 } A(t) = \frac{l^2 + h^2}{2t}$$

滑面圆弧半径:

$$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \quad (12)$$

滑动面总的弧长 L 用下式计算:

$$L = ar = 2r \arcsin \frac{\sqrt{l^2 + h^2}}{2r} \quad (13)$$

式中: α ——滑动面圆弧的圆心角。有了上面的几何关系后, 当坡形确定, 对于给定的 $O(0, 0)$ 和 B 点, 则由 (9) 式和 (10) 式可知, R_i, T_i 均是 t 的函数, L 也是 t 的函数, 故 (8) 式稳定系数 k 是 t 的一元函数, 则对式 (8) 求关于 t 的导数:

$$\begin{aligned} k(t) &= \left[\left(\prod_{i=1}^n T_i \right) (\tan \varphi) \left(R_i + \frac{dL}{Y} \right) - \right. \\ &\quad \left. \left(\prod_{i=1}^n T_i \right) (\tan \varphi) \left(R_i + \frac{dL}{Y} \right) \right] / \left(\prod_{i=1}^n T_i \right)^2 \\ &= \left[\left(\prod_{i=1}^n T_i \right) (\tan \varphi) \left(R_i + \frac{dL}{Y} \right) - \right. \\ &\quad \left. \left(\prod_{i=1}^n T_i \right) (\tan \varphi) \left(R_i + \frac{dL}{Y} \right) \right] / \left(\prod_{i=1}^n T_i \right)^2 \quad (14) \end{aligned}$$

上式中:

$$\begin{aligned} R_i &= - \frac{1}{r^2} \left[- \frac{a_i}{3} [r^2 - (x - x_0)^2]^{\frac{3}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (a_i x_0 + b_i - y_0) x \right. \\ &\quad \left. [(x - x_0) \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} + r^2 \arcsin \frac{(x - x_0)}{r}] + \right. \\ &\quad \left. [(x - x_0) \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} + r^2 \arcsin \frac{x - x_0}{r}] + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} (a_i x_0 - b_i - y_0) [-x_0 \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} + \right. \\ &\quad \left. (x - x_0) \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} + 2r \arcsin \frac{x - x_0}{r} + \right. \\ &\quad \left. 2(x - x_0)x_0 + 2r \arcsin \frac{x - x_0}{r} + \right. \\ &\quad \left. r^2 \frac{r}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}} - \frac{x_0 - (x - x_0)r}{r^2} \right] + \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} T_i &= - \frac{1}{r^2} \left[\left\{ \frac{1}{3} a_i x^3 - \frac{1}{2} a_i x_0 x^2 + \frac{b_i - y_0}{2} x^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (b_i - y_0) x \cdot x_0 - \frac{1}{3} [r^2 - (x - x_0)^2]^{\frac{3}{2}} \right\} \right]_{x_{i-1}}^{x_i} \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[- \frac{1}{2} a_i x^2 x_0 - \frac{1}{2} x^2 \cdot y_0 + y_0 x_0 x - \right. \\ &\quad \left. (b_i - y_0) x x_0 - \frac{1}{2} [r^2 - (x - x_0)^2]^{\frac{1}{2}} \cdot \right. \end{aligned}$$

$$\left. [2rr' + 2(x - x_0)x_0] \right]_{x_{i-1}}^{x_i} \quad (16)$$

式中: L, r, x_0, y_0 —— t 的函数, 其它量均为常量。前面推导出了各个量与 t 值的几何关系, 故其导数也可相应求得。

$$L = 2r \left(\arcsin \frac{\sqrt{l^2 + h^2}}{2r} - \frac{\sqrt{l^2 + h^2}}{\sqrt{4r^2 - l^2 - h^2}} \right) \quad (17)$$

$$A(t) = - \frac{l^2 + h^2}{2r^2} \quad (18)$$

$$x_0 = - A(t) \quad (19)$$

$$y_0 = \frac{1}{h} A(t) \quad (20)$$

$$r = \frac{1}{r} \left(\frac{L}{h} y_0 - x_0 \right) A(t) \quad (21)$$

以上是固定 O 点和 B 点所得的极小值, 变换不同

的 O 点和 B 点进行计算, 最终则可得稳定系数的最小值。当剪出点不在坡脚 O 点时, 圆心的坐标不能写成式 (13) 的简化形式。设圆弧的 2 个端点分别为 $A(x_a, y_a), B(x_b, y_b)$, 可以推出圆心坐标得一般公式, 依次求得其余量, 即:

$$\begin{cases} x_0 = x_b + 0.5 \times \\ \frac{(x_b - x_a)^2 / (y_b - y_a) + (y_b - y_a)}{(x_b - t) / y_b - (x_b - x_a) / (y_b - y_a)} \\ y_0 = (x_b - t)(x_b - x_0) / y_b + y_b \end{cases} \quad (22)$$

$$r = \sqrt{(x_0 - x_b)^2 + (y_0 - y_b)^2} \quad (23)$$

$$L = \alpha r = 2r \arcsin \frac{\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}}{2r} \quad (24)$$

$$x_0 = \frac{(x_0 - x_b)}{(x_b - t) - y_b(x_b - x_a) / (y_b - y_a)} \quad (25)$$

$$y_0 = - \frac{(x_b - x_0) / y_b - (x_b - t) x_0 / y_b}{(x_b - x_0) / y_b - (x_b - t) x_0 / y_b} \quad (26)$$

$$r = \frac{1}{r} [(x_0 - x_a)x_0 + (y_0 - y_a)y_0] \quad (27)$$

$$L = 2r \left[\arcsin \frac{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}{2r} - \sqrt{4r^2 - (x_b - x_a)^2 - (y_b - y_a)^2} \right] \quad (28)$$

式中: x_a, y_a, x_b, y_b ——滑弧下、上 2 个端点的坐标。
具体计算是通过编程实现的, 令 $k_1(t) = 0$, 则由 (16) 式得关于 t 的一个一元方程, 解此方程即可得 $k(t)$ 的极值点 t_0 , 将 t_0 代入 (8) 式则得稳定系数的极小值。(8) 和 (16) 式看起来虽然较为繁琐, 但都是普通的代数式, 编程实现是很容易的。

3 算 例

为了便于比较和检验, 这里将张天宝发表的一个例子用本文的方法进行计算。计算结果如表 1 及图 3, 二者较为一致。

表 1 最危险滑动圆弧的圆心、半径及稳定系数

项 目	圆心横坐标	圆心纵坐标	圆弧半径	稳定系数
	X / m	Y / m	R / m	k
原文算例	59.210	-84.715	152.125	1.2767
坐标转换后	59.210	134.715	152.125	1.2767
本文算法	61.105	119.271	138.450	1.2725

张天宝利用它本人提出的多元函数求极值的方法计算了潜在滑动面的位置和相应的稳定系数, 并提供了详细的计算数据和结果^[3]。即一均质土坡, 坡高 $h = 50\text{m}$, 土坡比 $1:m = 1:3.25$, 土的重度 $\gamma = 19.6\text{ kN/m}^3$, 摩擦系数 $\tan \varphi = 0.2$, 粘结力 $c = 58.8\text{ kPa}$, 求

最危险滑弧位置和最小稳定系数。

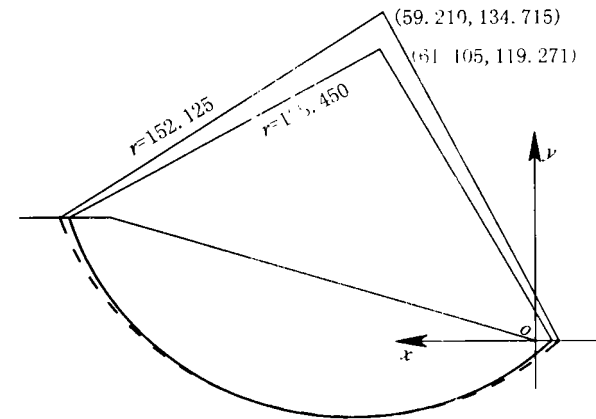


图 3 张天宝(虚线)和本文作者(实线)计算最危滑动圆弧

4 结 论

本论文在前人研究的基础上, 通过严格的推导, 得出了在用圆弧法求解土坡稳定性的解析公式, 通过算例表明了该方法的计算结果比一般条分法精确, 并且避免了人工分条的麻烦, 为编制通用的计算程序建立了清晰的思路。

[参 考 文 献]

[1] 李同录, 邓宏科, 李萍, 等. 搜索简单土坡滑动面的一种新方法[J]. 长安大学学报(地球科学版), 2003, 25(3): 56—59.

[2] 陈希哲. 土力学地基基础(第二版)[M]. 北京: 清华大学出版社, 1989. 139—141.

[3] 张天宝. 土坡稳定分析圆弧法的数值研究[J]. 成都工学院学报, 1978(2): 97—122.

[4] 黄文东. 极限平衡条分法中边坡潜在滑动面搜索方法的改进[J]. 世界采矿快报, 1999(9): 42—44.

[5] 山田刚二, 度正亮, 小桥澄治. 地すべリ・斜面崩坏の实态と对策[M]. 日本: 山海棠, 1971.

[6] Broms B. B. Landslides, Foundation Engineering Handbook[M]. Van Nostrand Reinhold Company, 1975.

[7] 郑书彦. 滑坡侵蚀及其动力学机制与定量评价研究[R]. 中国科学院研究生院 2002 届博士研究生学位论文, 2002.

[8] 郑书彦, 李占斌, 等. 宝塔山滑坡侵蚀有限元分析[J]. 水土保持学报, 2002, 16(1): 113—116.

[9] 郑书彦, 李占斌, 等. 黄土滑坡稳定性及其整治对策研究[J]. 水土保持通报, 2002, 22(3): 25—27.

[10] 章根德, 剡公瑞. 岩体高边坡流变学性状有限元分析[J]. 岩土工程学报, 1999, 21(2): 1—9.