

# 建立数学模型估测牧草产量研究

梁万鹏, 杨云贵, 程杰, 高阳

(西北农林科技大学 动物科技学院, 陕西 杨凌 712100)

**摘要:** 准确地估测草地产草量, 为确定合理载畜量提供重要的科学依据, 对维护草原生态平衡, 合理安排畜牧业生产等具有重要的理论与现实意义。估算草地产草量的手段可分为野外测量法、气象模拟模型法和遥感模型法三大类。利用大量的野外实际调查资料, 应用微积分原理, 推导出估算草地产草量的数学模型, 并与其它模型进行对比, 探讨了该方法的可靠性及估算精度。最后, 将模型推广应用于生产实践中以估测牧草产量。

**关键词:** 数学模型; 牧草产量; 估测

文献标识码: B

文章编号: 1000-288X(2010)05-0138-05

中图分类号: S812.8

## Estimating Grass Production by a Mathematical Model

LIANG Wan-peng, YANG Yun-gui, CHENG Jie, GAO Yang

(College of Animal Science and Technology, Northwest A & F University, Yangling, Shaanxi 710021, China)

**Abstract:** Accurate estimation of reasonable grassland yield is an important scientific basis in determining the carrying capacity. To maintain ecological balance of grassland, a reasonable arrangement of animal husbandry has important theoretical and practical significances. There are three main approaches to estimate grass production: field measurement, meteoro-simulation model, and remote sensing. A large number of survey data are used to construct a mathematical model. The model is used to estimate grass production and then compared with other models for its reliability and accuracy. At last, the model is applied to estimating forage production.

**Keywords:** mathematical model; grass production; estimating

草原是我国面积最大的绿色生态屏障, 具有防风固沙、涵养水源、保持水土、净化空气以及维护生物多样性等重要的生态功能。然而, 近年来由于畜牧业的发展, 大面积草原超载过牧、退化、荒漠化等问题不断加剧, 因此, 及时准确地估算草原产草量, 建立适宜的草原产草量监测预报模型, 将为确定合理载畜量提供重要的科学依据, 对维护草原生态平衡, 合理安排畜牧业生产等具有重要的理论与现实意义。

很多学者<sup>[1]</sup>对估测的数学方法及其它可利用的生物学参数进行了尝试。李建龙<sup>[2]</sup>利用投影寻踪回归技术对草地产量预报进行了研究, 预报精度达到 83.5% 以上。朱进忠、安沙舟、龙晶等<sup>[3]</sup>提出, 利用像元本身与周围像元之间的关系进行分类的局部结构法对草地牧草产量进行的估测, 能有效提高估测的可

靠性, 总精度达到 86.8%。Savory<sup>[4]</sup>利用 ERS-2 SAR 数据和 Landsat TM 数据估算半干旱区域草本植物的地上生物量, 其中结合水-云模型(water-cloud model)来解决裸土和岩石的后向散射问题, 决定系数  $R^2$  从 0.65 提高到了 0.80。徐斌, 杨秀春, 陶伟等<sup>[5]</sup>利用 MODIS 的 NPP 产品与地上生物量之间建立的关系, 实现了对当年我国北方草原产草量和载畜量的监测<sup>[5-7]</sup>。国外对草地生物量的研究始于 20 世纪 90 年代<sup>[8]</sup>, 多根据植被指数和地面样方草地生物量来建立统计模型<sup>[9-10]</sup>, 或是进一步结合环境和气候等相关变量建模<sup>[11]</sup>, 所建模型多为线性模型和非线性模型包括指数模型、对数模型等, 二次以上多项式模型使用较少, 可能是由于其生态学意义不明确, 或是由于次数过高的多项式模型容易产生

收稿日期: 2009-11-13

修回日期: 2010-01-11

资助项目: 中国科学院重要方向项目“半干旱黄土植被自然恢复过程及适度作用”(KZCX2-YW-441); 国家自然科学基金重点项目“干旱缺水地区土地覆被变化对区域耗水的影响”(40730631)

作者简介: 梁万鹏(1978—), 男(汉族), 甘肃省正宁人, 硕士, 主要从事旱区草地生态方面研究。E-mail: liangwp1930@sina.com.cn.

通信作者: 杨云贵(1964—), 男(汉族), 甘肃省平凉市人, 博士, 副教授, 研究方向为旱区草地生态和动物营养原理与调控方面研究。E-mail: yungui999@163.com.

过度拟合的现象<sup>[12]</sup>。尽管前人已经在此方面做了大量研究,但是已有的建模方法多种多样,如何寻找一种通用、适宜的建模方法还需进一步研究,所以深入探讨高精度草原产草量测产模型方法就具有重要的研究意义。

目前,基于统计的草原遥感估产有3种技术路线<sup>[13]</sup>:(1)遥感影像像元绿度值(植被指数VI)—地面生物量关系模式<sup>[14-17]</sup>,本方法得到的遥感估产等级图只反映卫星摄影时的牧草长势和生物量的空间分布状况,如果遥感摄影时间与地面测产时间基本同期,误差较小,或至少草地牧草产量在空间上的分布趋势与遥感估产一致;(2)遥感影像像元绿度值—地物光谱绿度值—地面生物量关系模式<sup>[18-21]</sup>,本方法先求得遥感光谱绿度与实测地物光谱绿度之间的关系,再求遥感光谱绿度与草地生物量之间的关系,缺点主要是地物光谱与遥感资料不易同步获取,其次是天气干扰,地面和天空都易受云层的影响;(3)遥感地学综合模式<sup>[22-23]</sup>,本方法将区域水热因子例如气温、降水、累计降水量、平均土壤含水量等引入模型,与遥感—地面生物量模型互相补充,克服各自存在的缺陷,可进一步提高估产精度。建立的统计模型有线性、幂函数、指数、对数、Growth、Logistics等,回归方法也有一元回归、多元回归、逐步回归等,所以得到的系数差别较大,并且应用也局限于建模的时间和地点,很多情况下地面资料的数量也影响模型的精度。由此可见,已有的数学模型易受到自然环境的影响,如气温、水分、光照等。而建立微积分数学模型只考虑估测产量具体时间点,也就是说没有时间的累积效应。同时它只涉及到草的平均高度,草的面积以及草的平均密度。从而有效地避免了以上因素的影响。

## 1 模型的建立与验证

### 1.1 数学模型

设想有一长方形人工草地,任选长、宽均为 $a$ 的样方,测量其高度 $x$ ,将其鲜草收割并称其重量 $w$ ,并假设样方的密度为 $r$ ,并分别记录其长 $a$ ,宽 $a$ ,高度 $x$ ,重量 $w$ ,那么,一个样方牧草鲜重:

$$w = r a a x \quad (1)$$

其密度可以表示为:

$$r = w / x a a \quad (2)$$

式中: $w$ ——样方牧草重量; $r$ ——单位面积牧草密度(比重); $a$ ——样方边长; $x$ ——牧草高度。

在公式(1)中, $w$ , $a$ , $x$ 均可通过实际测定得出,为已知量, $r$ 为未知量。为了便于理解,做出模型的三维立体图(图1)。

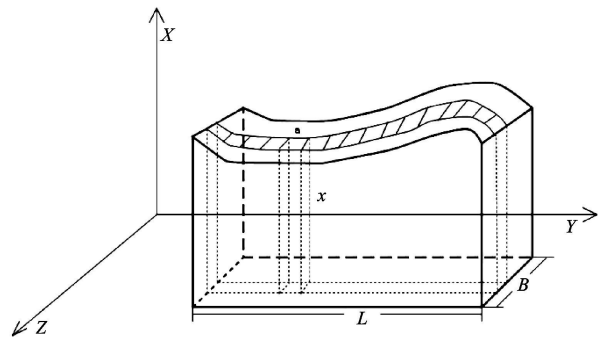


图1 草场三维立体图

注: $x$ 为样方中牧草高度; $a$ 为样方的长度和宽度; $L$ 为所测草地长度; $B$ 为所测草地宽度。

由于草地的密度在每个样方间均有差异,且高度不同,对于这样一个密度、高度连续变化的实体,要求出它的质量,可以用微积分方法解决。在这个模型当中,样方间密度的变化、样方间高度也是参差不齐,同时在一个样方之内,靠近地面部分与草层上部分的密度也不一样。所以,看作为3个变量,用三重积分可以解决此类问题。要说明的是,在模型的推导过程中,本着实际应用的要求,对公式做变量的等价代换,这种变换既不影响运算的结果,同时也可以使运算简单化。

每个样方牧草产量计算公式为:

$$dw = \int_1^x r a a dx = \int_1^x w / x dx \quad (3)$$

那么,整块草地的牧草产量为(构造三重积分进行计算):

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{B/a} \int_0^{L/a} \int_1^x dw dy dz \\ &= \int_0^{B/a} \int_0^{L/a} \int_1^x w / x dx dy dz \\ &= (w \ln x) (LB / a^2) \end{aligned} \quad (4)$$

因 $S = LB$ , $a$ 为单位样方,其值 $a = 1$ , $B/a$ :宽度上有多少个所选样方 $a$ ; $L/a$ :长度上有多少个所选样方 $a$ ,最终结果如下:

$$W = w S \ln x \quad (5)$$

从数学角度并结合实际情况,为了消除其它因素对结果的影响,对结果附加一个校正量 $w_0$ ,则最终结果:

$$W = w_0 + w S \ln x \quad (6)$$

这与目前经过验证,并且已经应用于生产当中的产量回归模型中的对数方程: $y = b_0 + b_1 \ln x$ 完全一致,说明由此方法推导出的数学模型,其结果是正确的,也是可靠的。

公式(6)中 $w_0$ 是校正量,其值通过对后面原始数据分析可以得出,为已知量; $S$ 为面积,通过测量可知; $w$ 是一个样方的重量,现场可以测出。那么,整个草地的产草量就是牧草高度 $x$ 的函数。

对于不规则地形可进行这样处理:上面用三重积分推导出的模型当中,高度  $x$  是主要影响因素,而面积通过直接测量可以计算出,那么,对于一个不规则地形,建立模型的步骤和上述过程完全一样,即针对高度  $x$  构造模型,构造出的数学模型与公式(6)完全一致。由于是不规则地形,面积不容易通过直接测量计算出,所以,我们用计算机辅助软件如:AutoCAD, Photoshop 或 ArcView 3.3 等软件可以精确的计算出面积  $S$ 。由于面积已经通过辅助软件求出为一常数,所以产量  $w$  的变化只与高度  $x$  有关,这样,不规则地形产量就可以计算出来。求不规则地形面积  $S$  的具体方法如下:利用 AutoCAD2007 中插入光栅

图像将经过扫描的地图调入到 AutoCAD 2007 中。然后,通过建立一个新图层以及多段线描点作图,将草地类型图作出。最后,利用 AutoCAD 2007 工具栏中的查询面积来查询图中草地类型的面积大小,通过作出的图形的比例,进而根据公式(3)计算出不规则地形面积。

### 1.2 模型的验证

结合野外调查资料,分析结果见表 1,  $0.25 \text{ m}^2$  样方中的草的重量  $w$ ,  $0.25 \text{ m}^2$  样方中平均高度  $x = (x_1 + x_2 + \dots + x_{43})/43$ ,  $x_i$  为  $0.25 \text{ m}^2$  样方中每种草的实际高度,那么,  $1 \text{ m}^2$  样方中的实际产量  $W_0 = 4w$ 。由公式(6)得出  $1 \text{ m}^2$  预测产量。

表 1 实测与预测对照统计分析

平均高度/ cm	生物量/ ( $\text{g} \cdot 0.25 \text{ m}^{-2}$ )	生物量/ ( $\text{g} \cdot \text{m}^{-2}$ )	预测产量 $\ln x$	精确度	平均高度/ cm	生物量/ ( $\text{g} \cdot 0.25 \text{ m}^{-2}$ )	生物量/ ( $\text{g} \cdot \text{m}^{-2}$ )	预测产量 $\ln x$	精确度
4.00	110	440	152.49	0.346 6	21.25	110	440	336.20	0.764 1
10.00	100	400	230.26	0.575 6	22.13	113	452	349.93	0.774 2
10.00	106	424	244.07	0.575 6	22.44	158	632	491.54	0.777 8
10.00	109	436	428.00	0.575 6	24.65	155	620	496.72	0.801 2
10.00	109	436	250.98	0.575 6	24.90	99	396	318.27	0.803 7
12.00	143	572	355.34	0.621 2	25.00	143	572	460.30	0.804 7
12.00	183	732	454.74	0.621 2	25.00	179	716	576.18	0.804 7
12.00	213	852	529.29	0.621 2	25.36	185	740	598.16	0.808 6
12.00	224	896	556.62	0.621 2	26.22	139	556	454.06	0.816 7
13.00	107	428	274.45	0.641 2	30.00	95	380	323.11	0.850 3
13.00	196	784	502.73	0.641 2	30.00	154	616	523.78	0.850 3
15.00	119	476	322.26	0.677 0	30.46	173	692	591.05	0.854 1
15.00	145	580	392.67	0.677 0	32.63	82	328	285.78	0.871 3
15.45	87	348	238.20	0.684 5	35.00	203	812	721.74	0.888 8
15.67	103	412	283.41	0.687 9	40.00	79	316	291.42	0.922 2
17.00	145	580	410.82	0.708 3	40.00	129	516	475.87	0.922 2
17.09	112	448	317.92	0.709 6	40.00	146	584	538.58	0.922 2
17.16	204	816	579.86	0.710 6	40.00	256	1 024	944.35	0.922 2
17.50	104	416	297.67	0.715 6	42.00	183	732	683.99	0.934 4
19.38	56	224	165.98	0.741 0	47.00	143	572	550.57	0.962 5
20.00	248	992	742.94	0.748 9	50.00	123	492	481.18	0.978 0
20.18	145	580	435.65	0.711 3					

注:表 1 数据来源为 2009 年 8 月 31 日至 9 月 12 日期间随水土保持研究所程积民调查黄土高原所得。这次调查从黄土高原东侧沿水平线一直到黄土高原西侧,具体地点从甘肃省正宁县到青海省日月山沿途设点调查,每个点选 15 个样方。样方大小  $0.5 \text{ m} \times 0.5 \text{ m}$ ,对每个样方统计牧草种数及每个种的数目,测量其平均高度、盖度、密度并称重。

由图 2 可以看出,随着平均高度的增加,预测产量也随之增加,并且当  $x < 10 \text{ cm}$  时,曲线比较明显;同时,随着平均高度的增加,实际产量也随之增加,但是,当  $x < 10 \text{ cm}$  时,曲线变化变化不是很明显。

预测产量一回归曲线总体上具有明显的变化幅度,而实际产量一回归曲线总体上比较平缓。由图 2 可知预测产量与实际产量的图形形状基本一致,且随

着平均高度的增加,趋向于重合。说明当平均高度很低时,预测产量与实际产量之间具有很大的出入,误差增大的原因主要是由于牧草高度很低,其地上生物量也很少,称重时不容易收割而造成。

随着高度的增加 2 条曲线趋向于重合,说明预测产量越来越接近于实际产量。误差减少的原因也是由于高度引起。

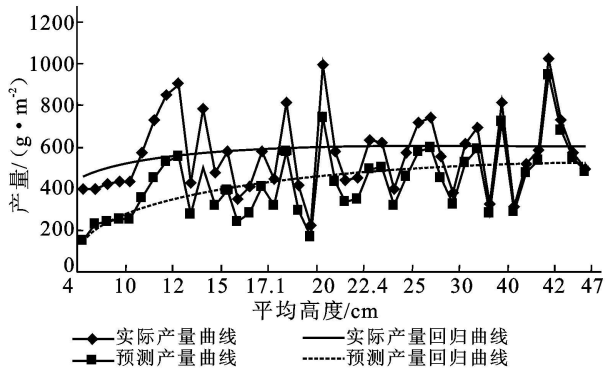


图2 预测产量与实际产量对比

图3为预测产量/实际产量的比值随平均高度(小一大)的走势。说明随着平均高度的增加,精确度也随之增加,并且这种增加是按照线性关系变化的。

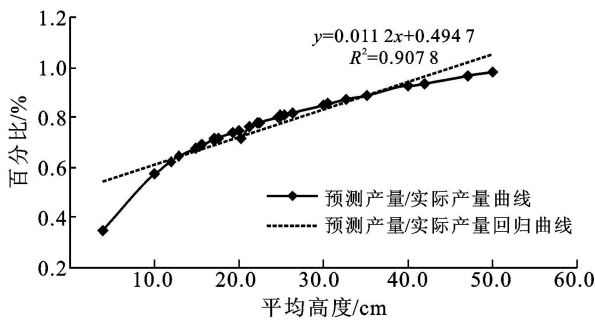


图3 预测产量/实际产量随平均高度变化曲线

为了验证由推导出的公式计算得出的预测产量与实际产量之间这两组数据是否存在显著性差异,用F检验来进行验证。在方差分析中,假设:

$H_0$ : 两组数据之间差异不显著;  $H_1$ : 两组数据之间存在显著差异;  $\alpha = 0.05$ 。

根据表1的原始数据:  $F = 1.2253$ ,  $F_{\alpha/2} = 1.830$ ,  $F_{1-\alpha/2} = 0.54645$ , 即:  $F_{1-\alpha/2} < F < F_{\alpha/2}$ , 接受  $H_0$ , 所以, 两组数据之间差异不显著, 也就是说预测产量与实际产量之间没有显著性差异。

由图2 预测产量—平均高度知, 推导出的数学模型为:

$$W = 153.06 + 97.932S \ln x \quad (R^2 = 0.2618)$$

## 2 模型的推广应用

推导出的模型经过精度、可靠性检验后可应用到实际生产当中。应用步骤可参照如下所述:

首先, 针对估测对象选取几个样方, 测其高度  $x_1, x_2, \dots, x_i$  并作记录。为了计算方便, 样方的长、宽均定为 1 m, 即 1 m × 1 m。

其次, 求所记录的高度  $x$  的平均值。并测量估测对象的对地投影面积  $S$ 。最后, 将上述参数代入数学

模型, 估测其总产量。例如分别取高度  $x = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50$  cm 这 10 组数据带入公式, 求得预测产量  $w_1$ , 精确度  $w_1/W_0$ , 这里面积  $S = 1 \text{ m}^2$ 。结果如表 2 所示, 由表 2 得知, 随着高度的增加, 精确度也相应的提高, 从 5 cm 时的 66.99% 增加到 50 cm 时的约 99% 左右。图 4 是精确度的变化趋势图。

表2 检验结果

平均高度/ cm	$W_1/(\text{g} \cdot \text{m}^{-2})$	实际产量/ ( $\text{g} \cdot \text{m}^{-2}$ )	精确度/ %
5	310.68	463.74	66.99
10	378.56	436	86.82
15	418.26	476	87.87
20	446.44	580	76.97
25	468.29	572	81.86
30	486.15	616	78.92
35	501.24	812	61.73
40	514.32	516	99.67
45	525.85	572	91.93
50	536.17	492	1.09

注:  $W_1 = 97.932S \ln x + 153.06$ 。

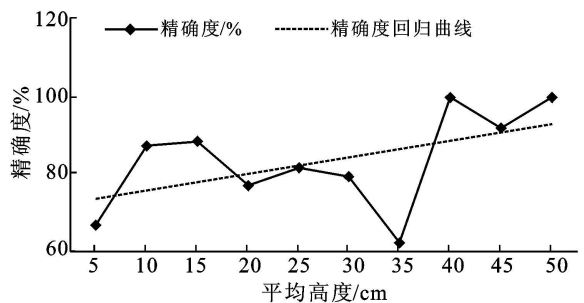


图4 精确度随平均高度变化趋势

## 3 结论

(1) 用推导出的数学模型  $W = 97.932S \ln x + 153.06$  进行产量估测时, 影响结果的有面积  $S$  和高度  $x$ , 其中  $x$  通过重复多个样方并取其平均值, 对于不规则地形, 借助于辅助软件可精确计算出面积  $S$ 。

(2) 随着牧草高度的增加, 其准确性也越来越高, 当  $x \geq 50$  cm 时, 准确性可达到 97.8%; 当  $x < 10$  cm 时, 准确性不足 70%, 主要原因是高度很低, 其地上生物量不易采集而造成原始数据误差较大所引起。

(3) 用数学模型  $W = 97.932S \ln x + 153.06$  进行产量估测时, 不同于已有的数学模型那样易受到自然环境因子如气温、水分、光照等的影响。而只考虑估测产量具体时间点, 也就是说没有时间的累积效应。

## [ 参 考 文 献 ]

- [ 1 ] 陶伟国, 徐斌, 杨秀春. 草原产草量遥感估测方法发展趋势及影响因素[ J ]. 草业学报, 2007, 16(2): 1-8.
- [ 2 ] 李建龙. 利用投影寻踪回归技术进行草地产量预报的研究[ J ]. 草地学报, 1995, 3(1): 65-74.
- [ 3 ] 朱进忠, 安沙舟, 龙晶. 用局部结构法分析卫星图像进行草地牧草产量估测的研究[ J ]. 中国草地, 1998(2): 21-24.
- [ 4 ] Savory T. Estimation of area aboveground biomass (AAB) of herbaceous vegetation in the semi-arid zone: A modification of the water - cloud model [ J ]. International Journal of Remote Sensing, 2002, 23(19): 4089-4100.
- [ 5 ] 徐斌, 杨秀春, 陶伟国, 等. 中国草原产草量遥感监测[ J ]. 生态学报, 2006, 27(2): 405-413.
- [ 6 ] Xu B, Xing X P, Qin Z H, et al. Development of spatial GIS database for monitoring on dynamic state of grassland productivity and animal loading balance in north China [ C ] // Geoinformatics 2004-Proc. 12th Int. Conf. on Geoinformatics; Glossarial Information Research; Bridging the Pacific and Atlantic. University of Gävle, Sweden; Gävle University Press, 2004: 585-592.
- [ 7 ] Qin Z H, Xu B, Li W J, et al. Integration of ground sampling with satellite imaging through GIS database to monitor range land productivity for grazing in north China [ C ] // Geoinformatics 2004-Proc. 12th Int. Conf. on Geoinformatics; Glossarial Information Research; Bridging the Pacific and Atlantic University of Gävle, Sweden; Gävle University Press, 2004: 715-722.
- [ 8 ] Kanemasu E T, Demit raids Shah T H, Su H, et al. Estimating grassland biomass using remotely sensed data [ M ] // Steven M D, Clark J A. London and Boston; Butter worth Heinemann, 1990: 185-191.
- [ 9 ] Roy P S, Janna S, Pant D N. Evaluation of grasslands and spectral reflectance relationship to its biomass in Kanha National Park (M. P.), India Grocer to International, 1991, 6: 39-45.
- [ 10 ] Purveyor J T, Tate's R I, Siyanda T, et al. Relationship between percent vegetation cover and vegetation indices[ J ]. International Journal of Remote Sensing, 1998, 19: 3519-3535.
- [ 11 ] Rasmussen M S. Developing simple, operational, consistent models by apply environmental and climatic information; Part I Assessment of net primary production[ J ]. International Journal of Remote Sensing, 1998, 19: 97-117.
- [ 12 ] Gao J. Quantification of grassland properties; how it can benefit from geoinformatic technologies[ J ]. International Journal of Remote Sensing, 2006, 27(7): 1351-1365.
- [ 13 ] 任继周. 草业科学研究方法[ M ]. 北京: 中国农业出版社, 1998.
- [ 14 ] Mutanga O, Skidmore A K. Narrow band vegetation indices overcome the saturation problem in biomass estimation [ J ]. International Journal of Remote Sensing, 2004, 25(19): 3999-4014.
- [ 15 ] 王正兴, 刘闯, 赵冰茹, 等. 利用 MODIS 增强型植被指数反演草地地上生物量[ J ]. 兰州大学学报: 自然科学版, 2005, 41(2): 10-16.
- [ 16 ] 朴世龙, 方精云, 贺金生, 等. 中国草地植被生物量及其空间分布格局[ J ]. 植物生态学报, 2004, 28(4): 491-498.
- [ 17 ] 牛志春, 倪绍祥. 青海湖环湖地区草地植被生物量遥感监测模型[ J ]. 地理学报, 2003, 58(5): 695-702.
- [ 18 ] 李建龙, 黄敬峰. 不同类型草地监测与估产遥感指标和光学模型建立的研究[ J ]. 新疆环境保护, 1996, 18(2): 34-39.
- [ 19 ] 黄敬峰, 王秀珍, 胡新博. 新疆北部不同类型天然草地产草量遥感监测模型[ J ]. 中国草地, 1999(1): 7-11.
- [ 20 ] 黄敬峰, 王秀珍, 王人潮, 等. 天然草地牧草产量遥感综合监测预测模型研究[ J ]. 遥感学报, 2001, 5(1): 69-74.
- [ 21 ] 黄敬峰, 王人潮, 胡新博. 新疆北部天然草地产草量遥感监测预测模型研究[ J ]. 浙江农业大学学报, 1999, 25(2): 125-129.
- [ 22 ] 黄富祥, 高琼, 傅德山, 等. 内蒙古鄂尔多斯高原典型草原百里香一本氏针茅草地地上生物量对气候响应动态回归分析[ J ]. 生态学报, 2001, 21(8): 1339-1346.
- [ 23 ] 赵冰茹, 刘闯, 刘爱军, 等. 利用 MODIS-NDVI 进行草地估产研究: 以内蒙古锡林郭勒草地为例[ J ]. 草业科学, 2004, 21(8): 12-15.