

几种计算水滴降落速度方法的比较

雷阿林 张学栋 唐克丽

中国科学院水土保持研究所黄土高原土壤侵蚀与旱地农业国家重点实验室·陕西杨陵·712100
(水利部)

摘要 该文介绍了目前国内外具有代表性的几种计算水滴降落速度的方法,并分别对其优劣进行了详尽地分析与比较,从而优选出适于人工模拟降雨实验室用的水滴降落速度计算方法。

关键词 水滴降落速度 计算方法 比较

Contrast of a Few Calculating Methods on Fall Velocity of Water Drops

Lei A'lin Zhang Xuedong Tang Keli

(State Key Laboratory of Soil Erosion and Dry-land Farming on Loess Plateau, Institute of Soil and Water Conservation, Chinese Academy of Sciences and Ministry of Water Resources, 712100, Yangling, Shaanxi)

Abstract We give a introduction to a few calculating methods on fall velocity of water drops at home and abroad at present. The virtues and defects of these methods have been compared. And a calculating method which is fit for artificial simulated rainfall has been chosen.

Key words velocity of water drops; calculating methods; Contrast

1 前言

降雨侵蚀,其侵蚀动能主要来源于雨滴对土壤表面的打击作用。因此计算水滴降落速度历来为人们所重视,从最初的劳斯(Laws)观测停滞大气中各种不同大小水滴的终点速度开始^[1],以后又有许多学者和专家利用物体在空气中的运动规律,求解偏微分方程,从理论上进行计算。在这方面比较有代表性的,一位是日本岛根大学农学部的福樱盛一教授^[2];另一位是湖南省水电科学研究所的吴魁鳌先生^[3]。从实测水滴的落地速度进而总结出经验方程,在这方面著名的有修正的沙玉清公式和修正的牛顿公式;另一个则是日本的三原义秋先生的三原公式^[4]。

我所国家重点实验室在修建国内最大的人工模拟降雨实验室时,为了制定实验室内使用的水滴降落速度标准,对上述两方面互相进行比较,确定了一个适用的计算水滴降落速度的方法。本文正是这一工作的总结。

2 劳斯法和三原义秋法的比较

从测定水滴降落速度方法的原理而言,两者基本是一致的。劳斯和三原均使用开有孔隙槽的

并可以转动的园盘,因而园盘转动频率的高低就决定了所测量的精度。劳斯是在 1941 年测量的,其园盘转速为 30r/s,园盘上开有 16 条透光槽,故其曝光频率为 $30 \times 16 = 480\text{Hz}$ 。三原义秋是 1950 年前后测量的,其园盘转动频率为 99.2r/s,曝光频率为 $99.2 \times 16 = 1587.2\text{Hz}$,约为劳斯的 3.3 倍。因此三原所测得的速度更接近于实际值。其次,从水滴降落高度讲,大致相同。劳斯是测停滞于大气中的雨滴,而三原是在室内测量从 11~12m 高处落下的水滴。

然而因水滴从这样高的高度降落仅需 1s 左右时间,因此这两种测量法,其精度均受制于遮光园盘的转动频率。70 年代出现了闪频观测器(strobo),此仪器曝光频率为 12 000 次/s,故精度大为提高。

按照三原所测结果,水滴最大速度为 9m/s,即水滴的降落速度随着水滴直径的增大而增加,但当其直径增大到 5mm 直至 6mm 为止,其速度不再变化。根据观测结果,并考虑到水滴直径为 2mm 以下时,其降落过程可看作球体下落,而直径在 5mm 以上时,因空气阻力,雨滴发生较大变形,故不能再视为正球体下落。据此三原提出如下经验方程:

$$v = 9.1549 \sqrt{r} - 2.6549 + 2.5342e^{-3.727 \sqrt{r}} - 0.389r^{2.18} \quad (1)$$

式中: v —— 落下终速度(m/s); r —— 水滴半径(mm); 等号右边最后一项即为因空气阻力所引起的变形。根据方程(1)所得曲线如图 1 所示。

在我国广泛使用修正的沙玉清公式和牛顿公式。即当雨滴小于 1.9mm 时,采用修正的沙玉清公式;当雨滴大于 2mm 时,采用牛顿公式。

沙玉清公式为:

$$v = 0.496 \times 10^x \quad (2)$$

式中:

$$x = [28.32 + 6.524 \lg(0.1D) - (\lg 0.1D)^2]^{0.5} - 3.665$$

v —— 降落终速度(m/s); D —— 雨滴直径(mm)。

牛顿公式为:

$$v = (17.20 - 0.844D)(0.1D)^{0.5} \quad (3)$$

式中: v 和 D 的意义同于(2)式。

(2)式和(3)式的计算值能较好地与劳斯观测值相符^[5]。根据(2)式和(3)式的计算结果绘的曲线如图 1 中的 A。其中 A_1 为(2)式的结果, A_2 为(3)式的结果。

上述 3 个方程式的共同特点是均不含雨滴或水滴的降落高度,也就是说被观测的雨滴或水滴的降落高度,至少应在 10m 以上。

从图 1 可知,依被修正的沙玉清公式所计算的结果,其值显然偏大。它不仅远大于三原的值[(1)式的结果],而且还大于将水滴视为球体下落时的理论计算值(参看图 3)。因此,用修正的沙玉清公式来计算直径 2mm 以下的水滴的降落速度时,显然不太适当。

水滴直径在 2mm~3mm 这一区段内,两条曲线逐渐靠近,3mm 以后,两条曲线的变化趋势不仅基本上一样,而且相差不大。因此,用被修正的牛顿公式时,一般当雨滴直径大于 3mm 时较为理想,在 2mm 附近偏差较大。

就三原的方程(1)而言,在水滴直径小于 2mm 以下时,方程右边最后一项有些多余。这是因为方程右边最后一项,原本是考虑水滴受空气阻力变形的一个因素,当水滴直径小于 2mm 时,

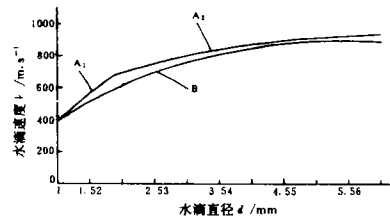


图 1 两种经验方法比较

因水滴表面张力较大,而完全可视作球体,故用该方程计算直径小于 2mm 的水滴降落速度时,所得结果有些偏小。

3 两种理论方程的比较

湖南省水电科学研究所吴魁鳌针对室内人工降雨的情况,提出对降雨中较大粒径雨滴的着地速度按下式计算^[3]。

$$v = 4.80 \cdot [D \cdot (1 - e^{-0.85 \cdot H/D})]^{0.5} \quad (4)$$

式中: v —— 水滴着地速度(m/s); H —— 水滴降落的初始高度(m); D —— 水滴直径(mm)。

(4)式适用于直径大于 1.9mm 的水滴。

日本岛根大学农学部福樱盛一义认为,在讨论水滴降落运动时应当考虑其加速度与浮力的影响^[2]。因此,在流体中加速运动物体所受阻为

$$F = \rho_a \cdot C_D \cdot S \cdot V_w^2 / 2 + (C_m \rho_a V_o \cdot dv_w / dt)$$

式中:等号右边第一项为粒性阻力,第二项为由加速度所引起的阻力,其中:

ρ_a —— 流体(空气)的密度($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$); C_D —— 阻力系数; S —— 水滴在其运动方向上的投影面积(m^2); V_w —— 相对空气的速度($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$); C_m —— 假想质量系数(球体时为 0.5); V_o —— 水滴的体积(m^3)。

在沿铅直运动情况下,导入力平衡之后得

$$\rho_w \cdot V_o \cdot \frac{d^2}{dt^2}(\rho_w - \rho_a) \cdot V_o g = \rho_a C_D \frac{\pi}{8} D^2 V_w^2 = C_m \cdot \rho_a \cdot V_o \frac{dv_w}{dt}$$

式中: g —— 重力加速度($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$); D —— 将水滴看作为球体时的直径(mm); ρ_w —— 为水密度($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)。

将上式整理后变为如下的微分方程(沿 Z 轴运动时):

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} = \frac{3C_D}{2D} \cdot \frac{\rho_a}{2\rho_w - \rho_a} \cdot \left(\frac{dZ}{dt}\right)^2 - \frac{2(\rho_w - \rho_a)}{2\rho_w - \rho_a} \cdot g \quad (5)$$

C_D 和雷诺数的关系为:

$$C_D = \frac{a}{R_r} + \frac{b}{R_r} + c \quad (6)$$

其中 a, b, c 为系数,可采用最小二乘法求出。表 1 给出了 a, b, c 3 个系数值。而雷诺数 R_r 则为:

$$R_r = \frac{1}{\gamma_a} \cdot D \frac{dZ}{dt} \quad (7)$$

式中: γ_a —— 空气动粘性系数。

表 1 $C_D \sim R_r$ 曲线系数及相关系数

系数	雷 诺 数					
	≤ 0.5	0.5~10	10~100	100~1 000	1 000~10 000	10 000~100 000
• a	24.00	22.48	-7.27	-13.12	31.40	-2282.93
• b	0	5.93	15.77	11.97	2.52	18.57
• c	0	0.08	-0.44	0.03	0.35	0.43
相关系数	-	0.999	0.999	0.999	0.96	0.97

用计算机求解方程(5),(6),(7)即可得各种降落高度,以及各种雨滴直径的落地速度。图 2 为根据这两种算法^[6]求出的曲线。其中 A 为福樱的结果,B 为吴魁鳌的结果。

由上述分析不难看出,这两种方法的共同特点:是从流体力学角度推导运动物体在紊流区的运动方程。但就吴氏的方程(4)而言,其一是未考虑加速度的影响;其二是认为阻力与流体的粘滞性系数无关;其三是在推导方程(4)时,不是求解水滴的终速度,亦即不是求解水滴在降落过程中重力与空气阻力平衡时所达到的终点速度,而是求解水滴从某一高处落下,即将着地时的瞬间速度。并以此瞬间速度与劳斯观测到的雨滴的平衡终点速度进行比较。在这种情况下有下列两点应考虑:

(1)室内人工模拟降雨,如果水滴是从某一人为高度自由静止落下,则在小于10m的高度范围内,无法达到平衡终点速度,无法与劳斯观测到的结果进行比较。也就是说按方程(4)所得到的结果小于天然降雨中雨滴的平衡终点速度。

(2)如果水滴是以一定的初速从某一人为高度落下,则在原方程推导过程中,所受动力这一项必须考虑初速的影响,亦即方程(4)的值偏小。水滴球体的体积,因与直径的三次方程成正比,故当水滴直径大于2mm时,必须考虑因空气阻力所引起的变形,而这一点在这两种理论方程中均未考虑到。

三原曾根据其实验观测到,直径为4mm的水滴,只相当于直径为3mm的球体在同样条件下的降落速度值,牟金泽提出对直径d大于1.5mm的水滴应引入变形系数^[5]。

$$K = \frac{v}{v_0} \tag{8}$$

图2为福樱曲线与吴氏曲线的比较。水滴直径为2mm时,两条曲线完全重合,随着水滴直径的增大,其差别愈来愈大。

4 理论方程和径验方程的比较

图3给出了理论方程(福樱)和经验方程的三条曲线。其中B为三原的方程曲线;A为沙玉清和牛顿公式曲线;C₁₀和C₆为福樱的曲线,其中C₁₀表示水滴降落高度为10m,C₆表示为6m。

由图3可知;沙玉清公式的值偏大。它不仅远大于三原公式的值,而且还大于将水滴视为正球体且从10m高处落下值。这显然是不可能的。通过利用福樱方程计算可知,对于直径在2mm以下的水滴来说,10m的降落高度已是取得平衡终速度的高度。因此用沙玉清公式计算直径2mm以下的水滴的平衡终速度不太合适。修正的牛顿公式在2mm~

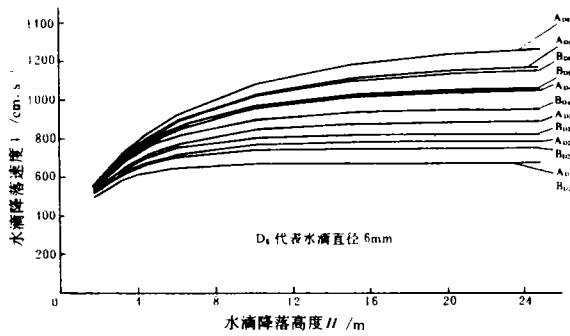


图2 两种理论曲线的比较

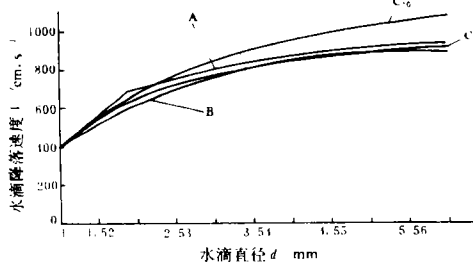


图3 理论曲线与经验曲线的比较

[REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED]